Oefententamen A Discrete Wiskunde II (152162)

Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd!
Gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan!

1. Voor $a, b \in \mathbb{Z}^+$ is S de verzameling van lineaire combinaties van a en b:
$$S = \{ax + by | x, y \in \mathbb{Z}\}.$$
Definieer $c = \min\{s \in S | s > 0\}$, het kleinste positieve getal in S.
   (a) Bewijs dat voor $d \in \mathbb{Z}^+$, met $d|a$ en $d|b$, dat dan $d|c$.
   (b) Bewijs dat $c|a$ en $c|b$.

2. (a) Bepaal met behulp van het algoritme van Euclides de grootste gemene deler ('gcd') van 208 en 390.
   (b) Bepaal gehele getallen x en y zodat
$$208x + 390y = 52.$$
   (c) Geef de (abstracte) priemontbinding van een getal n met precies 11 delers.

3. Voor $n \in \mathbb{Z}^+$ worden de functies f en g gegeven door:
$$f(n) = 2n^3 + 5n^2 \log_2(n).$$
Toon aan dat $f \in O(n^3)$.

4. Voor de berekening van a^n gebruiken we het volgende algoritme:

```
procedure Power(a: real; n: positive integer)
begin
  if (n = 1) then
  begin
    Result = a
  end
  else
  if Odd(n) then
  begin
    m := (n-1)/2;
    SubRes := Power(a, m);
    Result := SubRes * SubRes * a;
  end
  else
  begin
    m := n/2;
    SubRes := Power(a, m);
    Result := SubRes * SubRes;
  end
end
```

Met $f(n)$ geven we het aantal vermenigvuldigingen weer, dat nodig is voor de berekening van a^n in het algoritme hierboven.
Toon aan dat voor $n = 2^k$, en $k \geq 1$ geldt: $f(n) = f(n/2) + 1$, en bepaal $f(n)$.

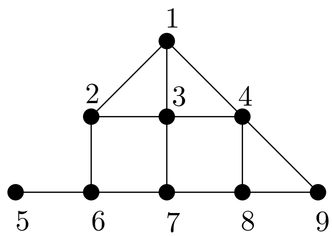
5. (a) Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking:

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} + 2a_n = 5n \quad (n \geq 0); \qquad a_0 = -\frac{4}{5}; \quad a_1 = 0.$$

   (b) We noteren met a_n, $(n > 0)$ het aantal manieren waarop het getal n geschreven kan worden als som van 1, 2 en 3. Hierbij letten we wel op de volgorde.Zo is bijvoorbeeld $a_3 = 4$ omdat er 4 mogelijkheden zijn: 1+1+1, 1+2, 2+1 en 3.

   Geef voor $n \geq 3$ een recurrente betrekking voor a_n, uitgedrukt in a_{n-1}, a_{n-2} en a_{n-3}.

6. (a) Bepaal met depth-first search een opspannende boom in de onderstaande graaf.



   (b) Construeer een optimale prefix code voor $\{a, b, c, d, e, f\}$ met frequenties respectievelijk 12, 25, 4, 30, 70 en 20.

7. We beschouwen de ring $R = \mathbb{Z}_{15}$.

   (a) Is R commutatief? Motiveer.

   (b) Is R een lichaam ('field')? Motiveer.

   (c) Bepaal, U_{15}, de groep inverteerbare elementen in R.

   (d) Geef de definitie van een cyclische groep, en ga na of U_{15} cyclisch is.

   (e) Voor een $M \in U_{15}$ geldt dat

$$M^{11} \equiv 4 \pmod{15}.$$

   Bepaal M.

Normering:

1.(a): 2	2.(a): 2	3.: 2	4.: 3	5.(a): 4	6.(a): 3	7.(a): 1
(b): 2	(b): 1			(b): 2	(b): 4	(b): 1
	(c): 2					(c): 2
						(d): 2
						(e): 3

Totaal: 36 + 4 = 40 punten