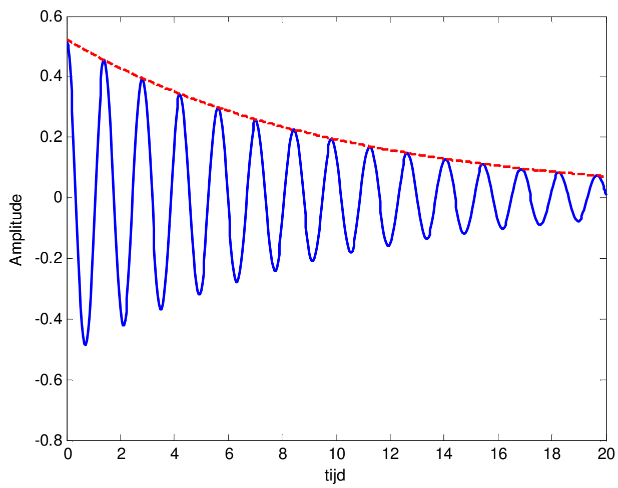
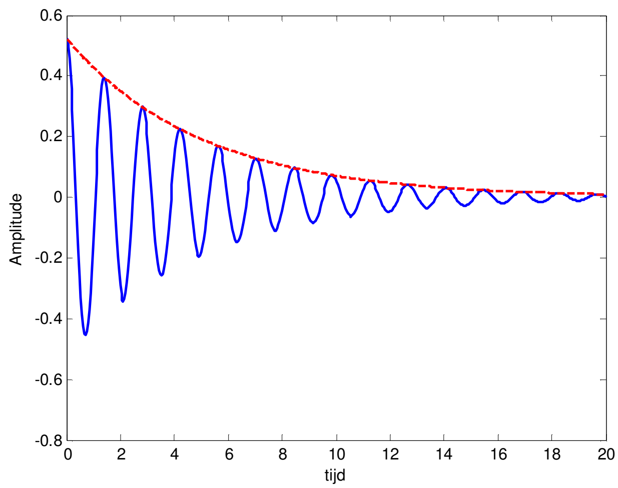
UITWERKINGEN DYNAMICA 1 Februari 2008

Uitwerking 1 (10 punten)

a) De slinger is ondergedempt, anders zouden er geen oscillaties zijn.





b) Zie slides 8 t/m 10 van HC5
Extra is nu de dempingsterm. Deze gaat lineair met de snelheid. $F = -\gamma v = -\gamma l\dot{\theta}$ en $\tau = lF = -\gamma l^2\dot{\theta}$.

c) Eerst de Ansatz-vergelijking (2x) differentieren en daarna invullen. De e-machten kunnen dan weggestreept worden en wat je overhoudt is: $q^2 + \frac{\gamma}{m}q + \frac{g}{l} = 0$. Uit de ABC-formule volgt dat q dan gelijk is aan: $q = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \frac{g}{l}}$. Dit kun je weer invullen in de Ansatz vergelijking en dat geeft je: $\theta = \theta_a e^{\left(-\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \frac{g}{l}}\right)t}$. De beweging is ondergedempt, dus de vergelijking moet bestaan uit een complexe e-macht. Dat kan alleen als dat wat onder de wortel staat kleiner is dan 0. We krijgen nu een vergelijking in de vorm: $\theta = \theta_a e^{-\beta t} e^{i\omega t}$ met $\beta = \frac{\gamma}{2m}$ en $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}$. In de vergelijking geeft de eerste factor de beginhoek (pi/6). De tweede factor (de 1^e e-macht) geeft het verval van de functie door de demping. De derde factor (2^e e-macht) beschrijft de oscillaties. Voor het controleren van de meetwaarden is alleen de 1^e e-macht van belang. De meetpunten $t = nT = n\frac{2\pi}{\omega}$ kunnen samen met de gegeven constanten ingevuld worden in de vergelijking en hieruit volgt de hoek na elke oscillatie.

<u>Uitwerking 2 (6 punten)</u>

Zie boek blz. 195 voor de oplossing via F = m*a.
Zie slides HC9 of boek blz. 286 voor oplossing via energie-behoud. (Dit kan gebruikt worden, omdat de hoek met de horizontaal constant is.)

a) Voor massieve rollende cilinders geldt $a = \frac{2}{3} g \sin(\vartheta)$. De versnelling van de cilinder is dus onafhankelijk van de straal R en de massa M. Ze zijn beide op hetzelfde moment beneden.
b) Voor de holle cilinder verandert het massatraagheidsmoment in $I = MR^2$. Dus geldt voor de versnelling: $a = \frac{1}{2} g \sin(\vartheta)$. De massieve cilinder is dus eerder beneden dan de holle cilinder.
c) Aangezien het blokje wrijvingsloos naar beneden kan glijden is de enige kracht op het blokje de zwaartekracht. Voor de versnelling van het blokje geldt daarom: $a = g \sin(\vartheta)$. Het blokje is dus eerder beneden dan de cilinder.

<u>Uitwerking 3 (6 punten)</u>

a) De ambulance heeft een sirene met een vaste frequentie. Maar de frequentie die je daadwerkelijk hoort wordt bepaald door het aantal golven dat per tijdseenheid je oor binnen komt. Aangezien de ambulance beweegt, zal hij bij het uitzenden van een volgend golffront alweer een stukje verder zijn. Hierdoor komen de golffronten voor de ambulance uit, dichter bij elkaar te liggen. En liggen de golffronten achter de ambulance verder uit elkaar. Afleiding, zie boek blz. 441.

b) Voor de frequentie voor de ambulance geldt: $f_{voor} = f_{amb}\dfrac{c}{c - v_{amb}}$. Voor de frequentie achter de ambulance geldt $f_{achter} = f_{amb}\dfrac{c}{c + v_{amb}}$. We hebben 2 formules met 2 onbekenden. We willen v_{amb} weten, dus we elimineren f_{amb}. Dit resulteert in: $v_{amb} = c\dfrac{f_{voor} - f_{na}}{f_{voor} + f_{na}} = 20.18 m/s$

<u>Uitwerking 4 (10 punten)</u>

Als de auto net niet gaat slippen, wordt de statische wrijvingskracht maximaal aangesproken. Als de bestuurder daarentegen 'gewoon vol gas'geeft, gaan de wielen slippen en is er sprake van glijdende wrijving. In beide gevallen is de wrijvingskracht tijdens het optrekken constant (alleen de grootte is anders).

a) $v^2 = 2as$ want de versnelling is constant, en de beginsnelheid was nul.

$F = \mu mg = ma$ dus $a = \mu g$ met μ de van toepassing zijnde wrijvingscoefficient.

$v^2 = 2\mu_s gS$ zonder slip en $v^2 = 2\mu_k gS$ met slip.

b) de wielen hebben een massatraagheidsmoment, en hebben rotatiesnelheid t.g.v. het optrekken. Dit betekent dat er impulsmoment is. De enige manier waarop impulsmoment kan veranderen is een netto krachtmoment.
Bij de 'voorzichtige' bestuurder is voortdurend sprake van zuiver rollende wielen. Het snelheids-verschil van de onderkant v/h wiel m/h wegdek is nul, en dat blijft het ook als de koppeling wordt ingetrapt. Tijdens het uitrollen werkt er dus geen wrijvingskracht, en de auto remt ook niet af.
Bij de 'onbesuisde' bestuurder draaien de wielen zo snel dat de locale wielsnelheid bij het wegdek naar achteren wijst. Daardoor ontstaat een naar voren gerichte wrijvingskracht, die de auto doet versnellen, maar de rotatiesnelheid v/d wielen vermindert.

c) $\tau = I\alpha, \quad \tau = \mu_k mgR \quad \Rightarrow \alpha = \dfrac{\mu_k mgR}{I}$ (constant zolang de wrijving werkt)

$\omega = \omega_0 - \alpha t$

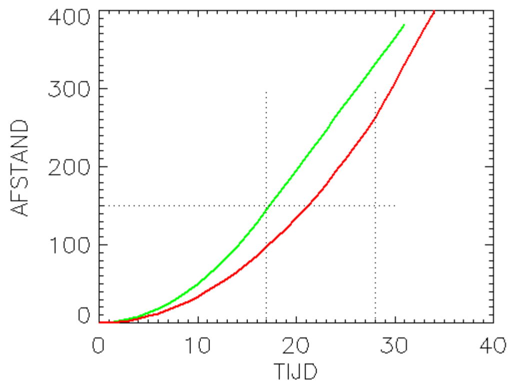
$F = ma, \quad F = \mu_k mg \quad \Rightarrow a = \mu_k g$ (constant zolang de wrijving werkt)

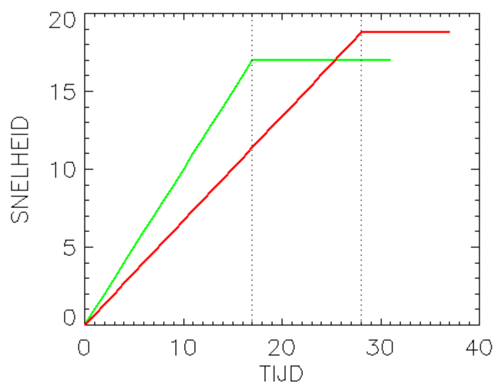
$v = v_0 + at$

Slipfase houdt op zodra $v = \omega R$: $v = \sqrt{2\mu_k gS} + \mu_k gt = (\omega_0 - \alpha t)R$

Dit levert: $t = \dfrac{\omega_0 R - \sqrt{2\mu_k gS}}{\mu_k g(1 + \dfrac{mR^2}{I})}$ met $\omega_0 R = 10\sqrt{2\mu_k gS}$ dus $t = \dfrac{9\sqrt{2\mu_k gS}}{\mu_k g(1 + \dfrac{mR^2}{I})}$

d)





Groen geeft de zuiver rollende auto aan. Rood geeft de aanvankelijk slippende auto aan.
Verticale stippellijnen geven aan vanaf welk moment het (zuiver) uitrollen begint.
Horizontale stippellijn geeft aan wanneer de afstand S bereikt is.
Opm: In de hier getekende situatie krijgt de aanvankelijk slippende auto de hoogste eindsnelheid. Afhankelijk van de getalswaarden voor I, m, etc. kan ook het omgekeerde het geval zijn.

Uitwerking 5 (10 punten)

a)

$$\underline{F} = m\underline{g} + \underline{R}$$

$$\tau = \frac{1}{2} mgl \sin\Theta \quad t.o.v.\ contactpunt$$

De richting en grootte van de reactiekracht is pas te berekenen als de beweging gevonden is door oplossen van de rotatie bewegingsvergelijking.

b) Het massamiddelpunt voert een cirkelbeweging uit, waarbij de hoeksnelheid steeds toeneemt. De horizontale component van de beweging van het mmp moet van de wrijvingskracht afkomstig zijn. De normaalkracht staat horizontaal, en zal minder dan mg bedragen want het mmp heeft een versnellingscomponent omlaag.

c)

$$\tau = I\alpha \quad \tau = \tfrac{1}{2} mgl \sin\Theta \quad I = \tfrac{1}{3} ml^2$$

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\Theta$$

$$\alpha d\theta = \omega d\omega$$

$$\frac{3}{2}\frac{g}{l}\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\Theta d\theta = \int_0^{\omega}\omega d\omega$$

$$\frac{3}{2}\frac{g}{l}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right) = \frac{1}{2}\omega^2$$

d) alle potentiele energie is omgezet in kinetische energie, omdat noch de wrijvings- noch de normaalkracht een verplaatsing hebben.

$$\frac{1}{2} mgl\cos\Theta_0 = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{3} ml^2 * \frac{3}{2}\frac{g}{l}\left(\cos\theta_0 - 0\right)$$

<u>Uitwerking 6 (10 punten)</u>

a) $F_0 = m{\omega_0}^2 r_0 \quad v = \omega_0 r_0 \Leftrightarrow \dfrac{F_0}{m} = \omega_0 v \Leftrightarrow v = \dfrac{F_0}{m\omega_0}$

b) Aangezien de kracht in het koord werkt vanuit de oorsprong van de beweging, is het krachtmoment t.o.v. dit punt nul, en blijft het impulsmoment t.o.v. dit punt gelijk. Het impulsmoment van een puntmassa bedraagt $I\omega = mr^2\omega$

c) $K = \frac{1}{2} mv^2 \cong \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} mr^2\omega^2$

(de radiele component van de snelheid is verwaarloosbaar als de massa langzaam naar binnen getrokken wordt)

Het kost kracht om de massa naar binnen te trekken, en er is verplaatsing. De toename v/d kinetische energie is dus afkomstig van de arbeid.

d)

$$F = m\omega^2 r$$

$$r^2\omega = {r_0}^2\omega_0$$

$$\omega^2 r = \left(r^2\omega\right)^2 / r^3 = \left({r_0}^2\omega_0\right)^2 / r^3$$

Uitwerking 7 (4 punten)

De koorden zij massaloos, zodat in elk koord de spankracht constant is.

Als er langzaam getrokken wordt, is er statisch krachtenevenwicht tot het moment van breken. De spankracht in het bovenste koord is dan groter, want dat moet de som van mg plus de trekkracht opbrengen. Het bovenste koord breekt eerst.

Als er snel getrokken wordt, dient in de analyse te worden meegenomen dat de koorden in feite een heel klein beetje kunnen uitrekken. Er ontstaat een longitudinale golf in het onderste koord. De massa geeft deze golf nauwelijks door aan het bovenste koord (en wordt een heel klein beetje versneld). Dus breekt het onderste koord.

Uitwerking 8 (4 punten)

Per tijdsinterval dt, stroomt massa μdt tegen turbineblad.
Impulsverandering dP van deze massa: μdt*2v

$$F = \frac{dP}{dt} = 2\mu v$$

Uitwerking 9 (4 punten)

$$F = -G\frac{mM}{r^2}$$

$$F = -GM\left(\frac{M_1}{(R-r)^2} + \frac{M_2}{(R+r)^2}\right) = -GM\,\frac{M_1(R+r)^2 + M_2(R-r)^2}{\left(R^2 - r^2\right)^2}$$

teller uitwerken:

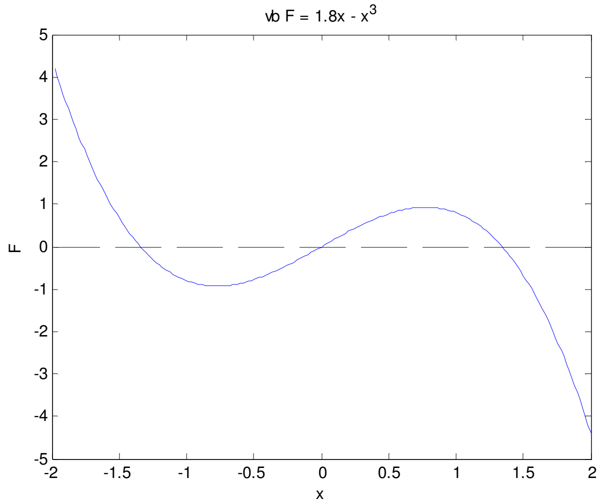
$$M_1(R+r)^2 + M_2(R-r)^2 = M_1(R^2 + 2rR + r^2) + M_2(R^2 - 2rR + r^2) \approx M_1(R^2 + 2rR) + M_2(R^2 - 2rR)$$

voor $M_1 \approx M_2$ wordt dit $(M_1 + M_2)R^2$

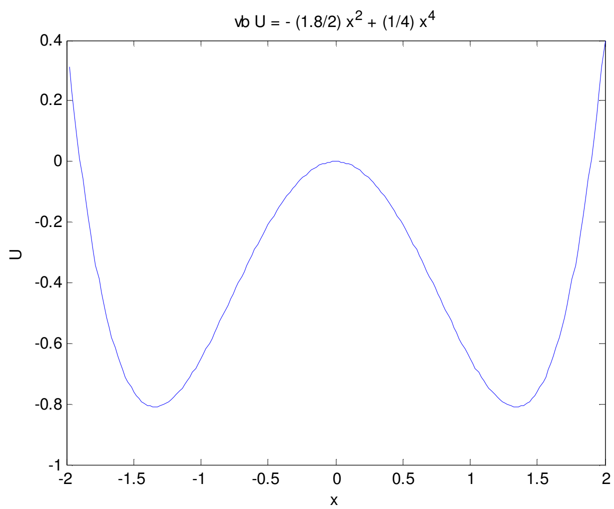
in noemer kan r term verwaarloosd worden t.o.v. R

Uitwerking 10 (10 punten)

a)



b) F = -dU/dx



c) De kracht is 0 op $x = 0$ of $x = \pm\sqrt{\frac{A}{B}}$ (in bovenstaande grafieken bij $x = \pm 1.34$).

De potentiele energie zit dan in een minimum of maximum, aangezien de afgeleide 0 is. De waarde van de energie hier zijn: Maximum $x = 0$ geldt $U = 0$ en minima $x = \pm\sqrt{\frac{A}{B}}$ geldt $U = -\frac{1}{4}\frac{A^2}{B}$.

d) *Als de beginsnelheid groot genoeg is* gaat de massa symmetrisch rond x = 0 oscilleren. Dit is het eerste gedeelte van de grafiek. Door de demping neemt echter de amplitude en dus de snelheid af. De massa zal op een gegeven moment niet meer genoeg energie hebben om over het maximum op x = 0 heen te komen. De massa gaat dan oscilleren in een van de minima rond $x = \pm\sqrt{\frac{A}{B}}$. Dit is het tweede gedeelte van de grafiek. De reden dat de amplitude niet 0 is op t = 100 is omdat de amplitude exponentieel afvalt en daarom pas 0 is als x is oneindig. De reden dat de frequentie verandert is omdat je potentiaal niet parabolisch is en daarom je differentiaal vergelijking niet lineair. Dit zie je het duidelijkst terug als de massa nog net over het maximum bij x = 0 heen-hobbelt (rond t = 30-50). Bij grote of kleine amplitude lijkt de potentiaal min of meer parabolisch en daarom is de frequentie hier redelijk constant.
