

Tentamen (Gewone) Differentiaalvergelijkingen

Vakcode : TW 191560123
 TN 191560130
 AT 191560380
Datum : Maandag 27 juni 2011
Tijdstip : 8:45-11:45
Plaats : Sportcentrum

- Vermeld duidelijk uw studie (TW/TN/AT).
- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.

Opgave 1. Bepaal e^{At} voor $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$.

Opgave 2. We nemen het stelsel met $x > 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x^3}. \end{cases} \quad (1)$$

- Bepaal een Hamiltoniaan H (behouden grootheid).
- Laat zien dat het unieke evenwicht een center is.
- Voor welke waarden van $H(x, y)$ zijn de banen periodiek (gesloten)? Met welke beginvoorwaarden $(x(0), y(0)) = (x_0, 0)$ komt dit overeen?
- Teken het faseplaatje met minstens een gesloten en één niet-gesloten baan.

Opgave 3. We kijken naar het stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} = (1-x)(2-y), \\ \dot{y} = (1-y)(2-x). \end{cases} \quad (2)$$

- Geef de definitie van asymptotische stabiliteit.
- Toon aan dat het evenwicht $(1, 1)$ asymptotisch stabiel is.
- Laat zien dat de cirkelschijf $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$ bevat is in het attractiegebied.
- Schets de nullclines en enkele pijltjes van het vectorveld. Formuleer een vermoeden van het attractiegebied van het evenwicht $(1, 1)$ op grond van uw schets.

Z.O.Z.

Opgave 4. We kijken naar het stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2, \\ \dot{y} = 2xy + \alpha(1 - x^2). \end{cases} \quad (3)$$

- (a) Laat zien dat $(-1, 0)$ en $(1, 0)$ de enige evenwichtspunten zijn. Bepaal de linearisatie en classificeer de evenwichten voor alle waarden van α .
- (b) Schets de faseplaatjes rond de evenwichtspunten voor deze linearisaties voor $\alpha = 0$ en $\alpha = 1$.
- (c) Laat zien dat de verticale lijnen $x = \pm 1$ bestaan uit banen.
- (d) Laat zien dat voor $\alpha = 0$ de horizontale lijn $y = 0$ bestaat uit banen.
- (e) Andere banen van (3) kunnen we vinden als oplossingen van de volgende GDV

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy + \alpha(1 - x^2)}{1 - x^2}.$$

Los deze op met beginvoorwaarde $y(0) = y_0$. Geef ook het existentie-interval voor het domein in x .

- (f) (*Dit onderdeel hoort alleen bij het TW en TN tentamen*) Bepaal y_0 zodat $\lim_{x \uparrow 1} y(x) = 0$. Bepaal ook het gedrag als $x \downarrow 1$.
- (g) Teken het globale faseplaatje voor $\alpha = 0$.
- (h) Teken het globale faseplaatje voor $\alpha = 1$.
Aanwijzing: (1) Gebruik uw antwoord bij (e) om een baan te tekenen die door de oorsprong gaat. (2) Merk op dat u bij (f) een baan heeft gevonden die precies in het evenwicht komt.

Opgave 5. Alleen voor *Differentiaalvergelijkingen voor TN en AT (191560130 & 191560380)*

Zij gegeven de diffusie-vergelijking

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

met $0 < x < 2$ en $t > 0$ en de volgende rand-/begin-voorwaarden

$$u(0, t) = -1, \quad u(2, t) = 1, \quad u(x, 0) = 0.$$

- (a) Bepaal de stationaire oplossing voor u en transformeer de PDV naar een vergelijking met homogene randvoorwaarden. Geef ook de beginvoorwaarde voor de getransformeerde vergelijking.
- (b) Bepaal de oplossing $u(x, t)$ in de vorm van een reeks.

Normering voor TW:

1.	5	3.b	2	4.d	1
2.a	2	3.c	2	4.e	3
2.b	2	3.d	3	4.f	3
2.c	2	4.a	2	4.g	1
2.d	1	4.b	2	4.h	2
3.a	2	4.c	1		

Normering voor TN:

1.	4	3.b	2	4.d	1
2.a	2	3.c	2	4.e	2
2.b	2	3.d	3	4.f	2
2.c	2	4.a	2	4.g	1
2.d	1	4.b	2	4.h	1
3.a	1	4.c	1		
5.a	1	5.b	4		

Normering voor AT:

1.	5	3.b	2	4.d	1
2.a	2	3.c	2	4.e	3
2.b	2	3.d	3	4.f	-
2.c	2	4.a	2	4.g	1
2.d	1	4.b	2	4.h	1
3.a	1	4.c	1		
5.a	1	5.b	4		

Totaal: 36 + 4 punten