

Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Vakcode : TW 156012
TN 156013
Datum : Maandag 2 juli 2012
Tijdstip : 8:45-11:45
Plaats : Sportcentrum

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is NIET toegestaan.

Opgave 1. U mag deze opgave overslaan. In dat geval telt het resultaat van de deelloets. Maakt U deze opgave alsnog, dan telt het hoogste resultaat van de deelloets of deze opgave.

(a) Geef de oplossing van het beginvoorwaardeprobleem

$$x' = \frac{-1}{t}x(t) - \frac{3}{7}\sqrt{t^2 + 3}, \quad x(1) = -1.$$

(b) Bepaal e^{At} voor

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Teken het faseplaatje van het lineaire stelsel $x' = Bx$ met

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. Gegeven is het systeem

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x^3, \\ \dot{y} = y + x - y^3 \end{cases}$$

met de oorsprong als enig evenwicht.

- (a) Bereken de tijdsafgeleide van $r^2 = x^2 + y^2$.
- (b) Bewijs dat er een periodieke baan is.
- (c) Teken het faseplaatje onder de aanname dat er slechts een periodieke baan is en slechts één evenwicht.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{1}{r}(x\dot{x} + y\dot{y}) \\ &= \frac{1}{r}(x^2 - xy - x^4 + y^2 + xy - y^4) \\ &= \frac{1}{r}(x^2 + y^2 - x^4 - y^4) \end{aligned}$$

Opgave 3. Gegeven is het systeem

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x^2 - y. \end{cases}$$

- (a) Bepaal en classificeer de evenwichten.
- (b) Bepaal een Hamiltoniaan voor dit vectorveld.
- (c) Teken de nullclines in het xy -vlak en geef de richting van het vectorveld op de nullclines aan.
- (d) Teken het globale faseplaatje.

Opgave 4. Alleen voor Gewone Differentiaalvergelijkingen voor TW (156012)

Gegeven is het systeem

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + xy, \\ \dot{y} = -x^2 - y^3. \end{cases}$$

Laat zien dat de oorsprong asymptotisch stabiel is.

Opgave 4. Alleen voor *Differentiaalvergelijkingen voor TN (156013)*

Bekijk de Laplacevergelijking op een rechthoek met zijden a en b met randvoorwaarden

$$u_x(0, y) = u_x(a, y) = u_y(x, b) = 0 \quad \text{en} \quad u_y(x, 0) = f(x). \quad (2)$$

- (a) Geef de eigenwaarden λ_k en de eigenfuncties $X_k(x)$ van het Sturm-Liouville probleem $X'' + \lambda X = 0$ met $X'(0) = X'(a) = 0$.
- (b) We nemen $f(x) = \sum_k f_k \cos(k\pi x/a)$. Geef de basisoplossingen $u_k(x, y)$ en bepaal de coëfficiënten c_k als functie van f_k voor de oplossing $u = \sum_k c_k u_k$ van (2).

Normering voor TW:

1.a	3	2.b	4	3.c	2
1.b	7	2.c	2	3.d	2
1.c	2	3.a	3	4	6
2.a	2	3.b	3		

Normering voor TN:

1.a	3	2.b	3	3.c	2
1.b	7	2.c	2	3.d	2
1.c	2	3.a	2	4.a	3
2.a	2	3.b	3	4.b	5

Totaal: 36 + 4 punten