Faculteit Management en Bestuur

Vaksgroep LEGS

Universiteit Twente
de ondernemende universiteit

Kenmerk: BBT.LEGS07.D028
Datum: 24 oktober 2008

Docent: L.B.M. Dieben
email L.B.M.Dieben@utwente.nl; tel. 053-489-3916; Capitool 15 - A1-09

STANDAARDUITWERKING

Tentamen: Inleiding Wiskundige Economie (158061)
Datum: 10 april 2008

Opgave 1

a. De hessematrix is $a\begin{bmatrix} -x_1^{-3/2}x_2^{1/2} & x_1^{-1/2}x_2^{-1/2} \\ x_1^{-1/2}x_2^{-1/2} & -x_1^{1/2}x_2^{-3/2} \end{bmatrix}$

$h_{1,1} < 0$ en de determinant is nul. De hessematrix is dus negatief semidefiniet, zodat de nutsfunctie concaaf is en daarom ook concaaf contoured.

b. $4a\sqrt{tx_1tx_2} = t \cdot 4a\sqrt{x_1x_2}$; t maal zoveel input levert ook t maal zoveel output op. Er is dus sprake van constante schaalopbrengsten.

c. $\min\limits_{x_1,x_2} \; w_1x_1 + w_2x_2$ o.d.v. $4a\sqrt{x_1x_2} = y$

Eerste-orde voorwaarden: $\left.\begin{aligned} w_1 &= \lambda 2a\sqrt{x_2}/\sqrt{x_1} \\ w_2 &= \lambda 2a\sqrt{x_1}/\sqrt{x_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dfrac{w_1}{w_2} = \dfrac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = \dfrac{w_1}{w_2}x_1$

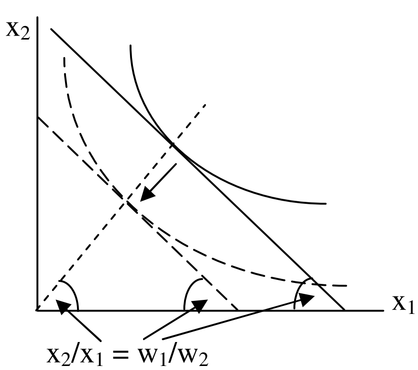
Met de voorwaarde volgt dan: $4a\sqrt{x_1\dfrac{w_1}{w_2}x_1} = y \Rightarrow x_1 = \dfrac{y}{4a}\sqrt{\dfrac{w_2}{w_1}} \Rightarrow x_2 = \dfrac{y}{4a}\sqrt{\dfrac{w_1}{w_2}}$

De kostenfunctie is: $C(\mathbf{w}, y) = w_1x_1 + w_2x_2 = \dfrac{y}{4a}\sqrt{w_1w_2} + \dfrac{y}{4a}\sqrt{w_1w_2} = \dfrac{y}{2a}\sqrt{w_1w_2}$

Deze geeft de minimale kosten bij gegeven prijzen van de inputs en een gegeven productie.

d. De marginale technische substitutieverhouding is: $-\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{\partial y/\partial x_1}{\partial y/\partial x_2} = \dfrac{2a\sqrt{x_2}/\sqrt{x_1}}{2a\sqrt{x_1}/\sqrt{x_2}} = \dfrac{x_2}{x_1}$

e.



Wanneer a stijgt, verschuift de isoquant naar binnen: een bepaalde y kan worden geproduceerd met minder x_1 en x_2.
In het optimale punt blijft echter gelden $x_2/x_1 = w_1/w_2$ en omdat w_1/w_2 constant is, is x_2/x_1 dat ook.

Opgave 2

a. $\max_{x_1,x_2} \; x + 2\sqrt{y}$ o.d.v. $p_x x + p_y y = m$

Eerste-orde voorwaarden: $\left.\begin{array}{r} 1 = \lambda p_x \\ 1/\sqrt{y} = \lambda p_y \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = 1/p_x \Rightarrow y = (p_x/p_y)^2$

Met de voorwaarde volgt dan: $p_x x + p_y(p_x/p_y)^2 = m$

$\Rightarrow x = m/p_x - p_x/p_y$ en dit is de vraagfunctie van goed x.

b. In de uitgangssituatie is het nut u = 26. Het substitutie-effect volgens Hicks volgt uit de situatie met de nieuwe prijzen, maar het nut van de uitgangssituatie. Dit is situatie 5. Het substitutie-effect is dus: $\Delta x = 18 - 22 = -4$ en $\Delta y = 16 - 4 = 12$.

Het inkomenseffect is het verschil tussen de situatie met de nieuwe prijzen en het inkomen van de uitgangssituatie (situatie 2) en situatie 5: $\Delta x = 20 - 18 = +2$ en $\Delta Y = 16 - 16 = 0$

Opgave 3

a. Punt a is geen mogelijk evenwicht, omdat in dit punt de situatie van B slechter is dan in de uitgangssituatie.

Punt b is wel een mogelijk evenwicht, omdat de situatie van A en B in dit punt beter is dan die in de uitgangssituatie. Ook is punt b Pareto-efficiënt, omdat het op de contractcurve ligt.

Punt c is geen mogelijk evenwicht. De situatie van A en B is in dit punt wel beter dan in de uitgangssituatie, maar punt c is niet Pareto-efficiënt, omdat het niet op de contractcurve ligt.

b. In het evenwicht is de prijsverhouding gelijk aan de (absolute waarde van) de raaklijnen aan de indifferentiecurven.

$$\frac{p_1}{p_2} = -\frac{dx_{2A}}{dx_{1A}} = \frac{\partial u_A/\partial x_{1A}}{\partial u_A/\partial x_{2A}} = \frac{x_{2A}^2}{2x_{1A}x_{2A}} = \frac{x_{2A}}{2x_{1A}} \text{ en } \frac{p_1}{p_2} = -\frac{dx_{2B}}{dx_{1B}} = \frac{\partial u_B/\partial x_{1B}}{\partial u_B/\partial x_{2B}} = \frac{x_{2B}}{x_{1B}}$$

Opgave 4

a. Voor periode t = 0 geldt: $c(0) = 1000 - 10\theta_1 - 30\theta_2$

Voor periode t = T geldt: $c(T,\omega_1) = 400 + 11\theta_1 + 33\theta_2$

$c(T,\omega_2) = 500 + 12\theta_1 + 40\theta_2$

$c(T,\omega_3) = 550 + 15\theta_1 + 350\theta_2$

b. De markt is niet volledig omdat de rang van de matrix van uitbetalingen (= 2) kleiner is dan het aantal toestanden (= 3) in periode T.

Opgave 5

a. Winst: $p_i y_i - C(y_i) = 6y_i - 0{,}5y_i^2 + 2y_i - 10 - 3y_i$.

Eerste orde voorwaarde: $6 - y_i + 2 - 3 = 0 \Rightarrow y_i = 5$

N.B. $p_i = 5{,}5$, dus de winst is: $27{,}5 - 25 = 2{,}5 > 0$.

b. De eerste producent maximaliseert de winst

$12p_1 - 2p_1^2 + p_2p_1 - 10 - 3(12 - 2p_1 + p_2) = 18p_1 - 2p_1^2 + p_2p_1 - 3p_2 - 46$

De eerste-orde voorwaarde is: $18 - 4p_1 + p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = 4{,}5 + 0{,}25p_2$

De tweede producent maximaliseert de winst

$12p_2 - 2p_2^2 + p_1p_2 - 10 - 3(12 - 2p_2 + p_1) = 18p_2 - 2p_2^2 + p_1p_2 - 3p_1 - 46$

De eerste-orde voorwaarde is: $18 - 4p_2 + p_1 = 0 \Rightarrow p_2 = 4{,}5 + 0{,}25p_1$

In het evenwicht is aan beide eerste-orde voorwaarden voldaan, zodat:

$p_1 = 4{,}5 + 0{,}25(4{,}5 - 0{,}25p_1) \Rightarrow p_1 = 6 \Rightarrow p_2 = 6$.

Hieruit volgt: $y_1 = y_2 = 6$ en $\text{winst}_1 = \text{winst}_2 = 36 - 28 = 8$.

Opgave 6

a. Het totaal van de technische coëfficiënten m.b.t. de ontvangsten van een bedrijfstak is gelijk aan één, zodat de getallen in de laatste rij van de matrix **B** zijn:
$1 - (0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}05 + 0{,}15) = 0{,}3$ en $1 - (0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}12) = 0{,}18$

b. Er geldt: $\Delta\mathbf{p} = [\mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]^{T}\Delta\mathbf{w}$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}4 \\ -0{,}3 & 0{,}9 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 2/3 \\ 1/2 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}05 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}12 \\ 0{,}3 & 0{,}18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/2 & 2/3 \\ 1/2 & 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}175 & 0{,}3 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

De prijs van de productie in bedrijfstak 1 daalt dus met 1,75% en die in bedrijfstak 2 met 3%.

Opgave 7

a. $P_t = P_{t-1} = P_{t-2} \Rightarrow P_{E,t} = P_t$
In evenwicht geldt: $100 - 0{,}5P = Y_V = Y_A = -50 + P \Rightarrow P = 100$

b. $100 - 0{,}5P_t = Y_V = Y_A = -50 + (0{,}75P_{t-1} + 0{,}25P_{t-2}) \Rightarrow P_t + 1{,}5P_{t-1} + 0{,}5P_{t-2} = 300$
Karakteristieke vergelijking: $k^2 + 1{,}5k + 0{,}5 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -0{,}5$ en -1.
Oplossing: $P_t = C_1(-0{,}5)^t + C_2(-1)^t$ + particuliere oplossing
Na een verstoring van het evenwicht ontstaat een alternerende ontwikkeling en de prijs gaat dan niet naar een nieuw evenwicht.