**Faculteit Management en Bestuur**

**Vakgroep LEGS**

**UNIVERSITEIT TWENTE.**

*Kenmerk:* MB.LEGS08.D035
*Datum:* 30 november 2011

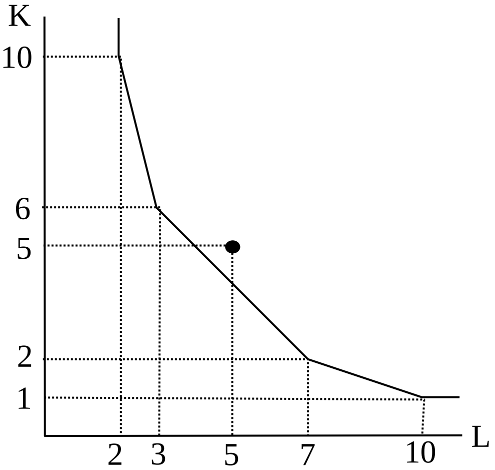
*Docent:* L.B.M. Dieben
email L.B.M.Dieben@utwente.nl; tel. 053-489-3916; Institutenweg 25 - T-225

# STANDAARDUITWERKING

**Tentamen: Inleiding Wiskundige Economie (158061)**
**Datum: 15 april 2010**

## Opgave 1

a.




b. Ten opzichte van de eerste of tweede combinatie is er bij y = 4, K = 3 en L = 17 minder output met meer inputs. Uit de eigenschap van monotoniciteit volgt dan dat dit punt tot de verzameling van productiemogelijkheden behoort.

c. Zie het punt K = 5, L = 5 in de figuur. Het hoort tot V(5) omdat het boven de isoquant ligt.

d. Onderstaande tabel geeft de kosten in ieder hoekpunt.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| K | 1 | 2 | 6 | 10 |
| L | 10 | 7 | 3 | 2 |
| Kosten | 55 | 45 | 45 | 60 |

De ondernemer kiest K = 2 met L = 7, of K = 6 met L = 3, of een lineaire combinatie van beide punten.

## Opgave 2

$$\max_{y,x_1,x_2}\ py-(w_1x_1+w_2x_2)\ \text{ o.d.v. } y=4x_1^{0,25}x_2^{0,5} \Rightarrow \max_{y,x_1,x_2}\ p\cdot 4x_1^{0,25}x_2^{0,5}-w_1x_1-w_2x_2$$

Eerste-orde voorwaarden: $\left.\begin{array}{l} p\cdot x_1^{-0,75}x_2^{0,5}=w_1 \\ p\cdot 2x_1^{0,25}x_2^{-0,5}=w_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{w_1}{w_2} \Rightarrow x_2=2\dfrac{w_1}{w_2}x_1$

Met de eerste voorwaarde volgt dan: $p\cdot x_1^{-0,75}2^{0,5}w_1^{0,5}w_2^{-0,5}x_1^{0,5}=w_1 \Rightarrow x_1^{0,25}=2^{0,5}pw_1^{-0,5}w_2^{-0,5}$

$\Rightarrow x_1=2^2p^4w_1^{-2}w_2^{-2} \Rightarrow x_2=2^3p^4w_1^{-1}w_2^{-3}$

$\Rightarrow y=2^2\cdot 2^{0,5}pw_1^{-0,5}w_2^{-0,5}\cdot 2^{1,5}p^2w_1^{-0,5}w_2^{-1,5}=2^4p^3w_1^{-1}w_2^{-2}$

De winstfunctie is: $\pi(p,w_1,w_2)=py-w_1x_1-w_2x_2=(2^4-2^2-2^3)p^4w_1^{-1}w_2^{-2}=4p^4w_1^{-1}w_2^{-2}$
Deze geeft de maximale winst die de ondernemer kan behalen bij gegeven prijzen van de output en de inputs.

## Opgave 3

a. De hessematrix is $\begin{bmatrix} -0{,}5x_1^{-1{,}5}x_2^{0{,}5} & 0{,}5x_1^{-0{,}5}x_2^{-0{,}5} \\ 0{,}5x_1^{-0{,}5}x_2^{-0{,}5} & -0{,}5x_1^{0{,}5}x_2^{-1{,}5} \end{bmatrix}$

$h_{1,1} < 0$ en de determinant is nul. De hessematrix is dus negatief semidefiniet, zodat de nutsfunctie concaaf is en een concave functie is ook 'concaaf contoured'.

b. $\min\limits_{x_1,x_2} \; p_1x_1 + p_2x_2$ o.d.v. $\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2 = u$

Eerste-orde voorwaarden: $\left.\begin{array}{l} p_1 = \lambda\, 2\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)/\left(2\sqrt{x_1}\right) \\ p_1 = \lambda\, 2\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)/\left(2\sqrt{x_2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} \Rightarrow \sqrt{x_2} = \dfrac{p_1}{p_2}\sqrt{x_1}$

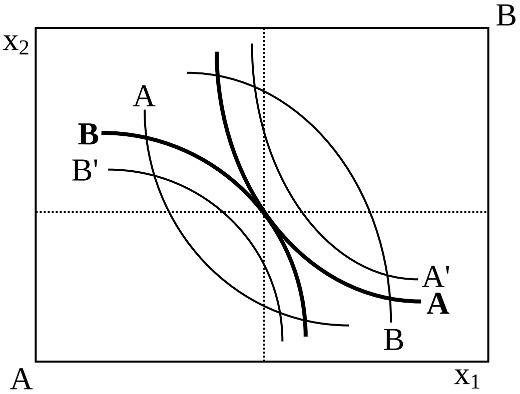
Met de voorwaarde volgt dan: $\left(\sqrt{x_1} + \dfrac{p_1}{p_2}\sqrt{x_1}\right)^2 = u \quad \Rightarrow x_1 = u\left(\dfrac{p_2}{p_1 + p_2}\right)^2$

Dit is de voorwaardelijke vraagfunctie van $x_1$; deze geeft de optimale hoeveelheid van goed 1 bij gegeven inkomen en prijzen.

## Opgave 4

a. De inkomens zijn: $m_{Ans} = 40p_1 + 20p_2$ en $m_{Bas} = 10p_1 + 40p_2$ .
Bas besteedt 40% van zijn inkomen aan goed 1.
Het vraagoverschot van goed 1 is:
$z_1 = (28p_1 + 14p_2)/p_1 + (4p_1 + 16p_2)/p_1 - (40 + 10) = 30p_2/p_1 - 18$
Het evenwicht $z_1 = 0$ geeft: $p_2/p_1 = 3/5$, dus $p_1/p_2 = 5/3$.
Of voor goed 2; Ans besteedt 30% van haar inkomen aan goed 2:
$z_2 = (12p_1 + 6p_2)/p_2 + (6p_1 + 24p_2)/p_2 - (20 + 40) = 18p_1/p_2 - 30 \Rightarrow p_1/p_2 = 5/3$.

b.




Het evenwicht is het raakpunt van de (vette) indifferentiecurven van beide consumenten. Iedere consument kan alleen een hogere indifferentiecurve (A' of B') bereiken wanneer de ander op een lagere indifferentiecurve uitkomt. Niemand kan dus verbeteren zonder achteruitgang van de ander en daarom is de situatie Pareto-efficiënt.

## Opgave 5

a. $c(0) = €10.000 - €200\theta_1 - €100\theta_2$
$c(T,\omega_1) = €12.000 + €300\theta_1 + €105\theta_2$
$c(T,\omega_2) = €10.000 + €250\theta_1 + €100\theta_2$
$c(T,\omega_3) = €8.000 + €150\theta_1 + €90\theta_2$

b. De matrix van uitbetalingen heeft rang 2 en dit is kleiner dan het aantal toestanden. Daarom is niet ieder consumptieproces bereikbaar, zodat de markt niet volledig is.

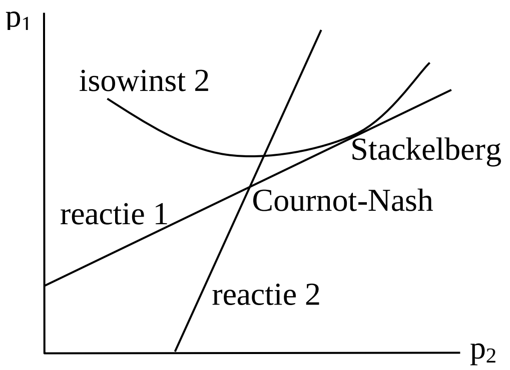
c. €300/1,05 = €285,71

## Opgave 6

a. Voor de eerste ondernemer geldt:
$winst_1 = p_1y_1 - C_1(y_1) = 110p_1 - 20p_1^2 + 10p_1p_2 - 100 \ - 4(110 - 20p_1 + 10p_2)$
$d(winst_1)/dp_1 = 0 \Rightarrow 110 - 40p_1 + 10p_2 + 80 = 0 \Rightarrow$ reactiefunctie: $p_1 = 0{,}25p_2 + 4{,}75$
Voor de tweede ondernemer geldt:
$winst_2 = p_2y_2 - C_2(y_2) = 90p_2 - 15p_2^2 + 10p_1p_2 - 80 - 5(90 - 15p_2 + 10p_1)$
$d(winst_2)/dp_2 = 0 \Rightarrow 90 - 30p_2 + 10p_1 + 75 = 0 \Rightarrow$ reactiefunctie: $p_2 = 0{,}333p_1 + 5{,}5$

b. Voor de eerste ondernemer (de volger) geldt: $p_1 = 0{,}25p_2 + 4{,}75$
De winst van de tweede ondernemer is dan:
$90p_2 - 15p_2^2 + 10(0{,}25p_2 + 4{,}75)p_2 - 80 - 450 + 75p_2 - 50(0{,}25p_2 + 4{,}75)$
Eerste orde voorwaarde: $90 - 30p_2 + 5p_2 + 47{,}5 + 75 - 12{,}5 \Rightarrow 25p_2 = 200 \Rightarrow p_2 = 8$
$\Rightarrow p_1 = 2 + 4{,}75 = 6{,}75$ en $y_1 = 110 - 135 + 80 = 55$; $y_2 = 90 - 120 + 67{,}5 = 37{,}5$
N.B. Hieruit volgt: $winst_1 = 51{,}25 > 0$ en $winst_2 = 32{,}5 > 0$.

c.




Het Cournot-Nash evenwicht is het snijpunt van de reactiefuncties.
Het Stackelberg evenwicht ligt op de reactiefunctie van de eerste ondernemer. Het is het raakpunt van de isowinstcurve van de tweede ondernemer aan deze reactiefunctie.
Zie figuur 7.9 in de syllabus.

3

## Opgave 7

a. De input-output tabel is:

| | Bedrijfstak 1 | Bedrijfstak 2 | Finaal | Totaal |
|---|---|---|---|---|
| Bedrijfstak 1 | 320 | 480 | 800 | 1600 |
| Bedrijfstak 2 | 480 | 120 | 600 | 1200 |
| Invoer | 80 | 240 | − | 320 |
| Arbeid | 240 | 144 | − | 384 |
| Kapitaal | 480 | 216 | − | 696 |
| Totaal | 1600 | 1200 | 1400 | |

Rijtotaal bedrijfstak = kolomtotaal en daaruit volgen de finale leveringen.

b. Het directe inkomenseffect volgt uit de matrix B:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 80/1600 = 0{,}05 & 240/1200 = 0{,}2 \\ 240/1600 = 0{,}15 & 144/1200 = 0{,}12 \\ 480/1600 = 0{,}3 & 216/1200 = 0{,}18 \end{bmatrix}$$

Het directe inkomenseffect van arbeid is $20 \times 0{,}15 = 3$

Het directe en indirect inkomenseffect volgt uit de matrix $B(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0{,}1\end{bmatrix} \Rightarrow (\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}0{,}8 & -0{,}4\\ -0{,}3 & 0{,}9\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1{,}5 & 2/3\\ 0{,}5 & 4/3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}0{,}05 & 0{,}2\\ 0{,}15 & 0{,}12\\ 0{,}3 & 0{,}18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1{,}5 & 2/3\\ 0{,}5 & 4/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}175 & 0{,}3\\ 0{,}285 & 0{,}26\\ 0{,}54 & 0{,}44\end{bmatrix}$$

Het directe en indirecte inkomenseffect van arbeid is $20\times 0{,}285 = 5{,}7$

c. $\Delta p_1 = 0{,}2\Delta p_1 + 0{,}3\Delta p_2 \quad \Rightarrow \Delta p_1 = 0{,}375\Delta p_2$

$\Delta p_2 = 0{,}4\Delta p_1 + 0{,}1\Delta p_2 + 0{,}2\times 6\% \quad \Rightarrow \Delta p_2 = 0{,}15\Delta p_2 + 0{,}1\Delta p_2 + 1{,}2\%$

Hieruit volgt: $\Delta p_2 = 1{,}6\%$ en $\Delta p_1 = 0{,}6\%$

## Opgave 8

$Y_t = C_t + I_t = 0{,}8Y_t + 10 + 0{,}1Y_t + 0{,}45(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + 20 = 0{,}8Y_t + 0{,}45Y_{t-1} - 0{,}45Y_{t-2} + 30$

$\Rightarrow 0{,}1Y_t - 0{,}45Y_{t-1} + 0{,}45Y_{t-2} = 30$

Karakteristieke vergelijking: $0{,}1k^2 - 0{,}45k + 0{,}45 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 3$ en $1{,}5$

Oplossing: $Y_t = Z_1 3^t + Z_2 1{,}5^t$ + particuliere oplossing

($Z_1$ en $Z_2$ zijn constanten die worden bepaald door de beginvoorwaarden)

Na een verstoring van het evenwicht ontstaat een monotone ontwikkeling en Y gaat niet naar een (nieuw) evenwicht.