Kenmerk: EWI/TW/SP/027
Datum: 10 april 2009

Tentamen Kansrekening (153037)
vrijdag 17 april 2009 van 9.00 - 12.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven
Vermeld ook uw studentnummer op werk en tentamenbriefje

1. Volgens een gynaecoloog blijken 6 van de 10 vrouwen die volgens een bepaalde thuistest zwanger zijn, helemaal niet zwanger te zijn. Volgens de producent van de thuistest is het resultaat van de test bij niet-zwangere vrouwen in 90% en bij zwangere vrouwen in 100% van de gevallen correct.

   a. Definieer relevante gebeurtenissen en geef alle beweringen in formulevorm weer in termen van deze gebeurtenissen.

   b. Bepaal de kans dat een willekeurige gebruikster van de test zwanger is onder de veronderstelling dat alle beweringen juist zijn.

2. Bij het spelletje *chuck-a-luck* zet je een bedrag in op één van de getallen $1, 2, \ldots, 6$. Vervolgens wordt er één keer gegooid met drie zuivere dobbelstenen en er wordt geteld hoeveel dobbelstenen het ogenaantal tonen waarop je hebt ingezet. Is dat aantal 0 dan ben je je inzet kwijt. Is het aantal positief dan krijg je je inzet terug en win je bovendien je inzet maal dat aantal. Bereken de verwachte winst bij een inzet van één euro.

3. De stochastische variabele X bezit een exponentiële kansdichtheid met parameter $\lambda = \frac{1}{2}$.

   a. Bepaal de kansdichtheid van $Y = \sqrt{X}$.

   b. Bepaal de verwachting van Y.

4. De simultane kansdichtheid van X en Y wordt gegeven door

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & \text{voor } |x| + |y| < 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

   a. Bereken c.

   b. Bepaal de marginale kansdichtheid van X.

   c. Bepaal $\mathrm{cov}(X,Y)$.

   d. Ga na of X en Y onafhankelijk zijn.

   e. Bepaal de voorwaardelijke kansdichtheid van X gegeven $Y = y$ (en geef aan voor welke waarden van y deze is gedefinieerd).

   f. Bereken de verwachting van X^2 gegeven $Y = \frac{1}{2}$.

Z.O.Z.

5. De stochastische variabelen $X_1, X_2, \ldots,$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Zij $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ voor $n = 1, 2, \ldots$.

a. Bepaal de kansdichtheid van S_2.

b. Bepaal de verwachting en de variantie van S_n.

c. Bepaal de momentgenererende functie van S_n.

d. Bepaal met behulp van de Centrale Limietstelling een benadering voor de kans $P(\frac{1}{100}|S_{100}| < \frac{1}{10})$ in termen van $\Phi(x)$, de standaardnormale verdelingsfunctie.

6. Twee mensen spreken af elkaar kort na 12 uur op een bepaalde plek te ontmoeten. Ze komen daar aan op de tijdstippen T_1 en T_2, gemeten vanaf 12 uur. Veronderstel dat T_1 en T_2 onderling onafhankelijk zijn en exponentieel verdeeld met parameter $\lambda > 0$. De wachttijd van de persoon die als eerste aankomt wordt gegeven door $W = |T_1 - T_2|$.

a. Bepaal de verdelingsfunctie van het tijdstip U van de eerste aankomst.

b. Bepaal de verdelingsfunctie van het tijdstip V van de laatste aankomst, en bereken de verwachting van V.

c. Laat zien dat $P(W > t \,|\, T_1 > T_2) = e^{-\lambda t},\ t \geq 0$.

d. Bepaal de verdeling van W.

Normering:

1		2	3		4						5				6			
a	b		a	b	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	a	b	c	d
1	3	3	3	2	1	2	2	1	3	2	3	2	2	2	2	3	3	1

Eindcijfer: $\frac{\text{Totaal}}{41} \times 9 + 1$ (afgerond)