Tentamen Kansrekening (191530370)
dinsdag 2 juli 2013 van 8.45 - 11.45 uur

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven.
Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd.
Gebruik van een rekenmachine is *niet* toegestaan.

1. Zij X een discrete stochastische variabele met waardenbereik $0, 1, 2, \ldots$ en momentgenererende functie $\phi_X(t)$. De functie $\kappa_X(t) = \ln(\phi_X(t))$ heet de *cumulantgenererende functie* van X en de grootheden

$$\kappa_n = \left[\frac{d^n}{dt^n}\kappa_X(t)\right]_{t=0}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

worden de cumulanten van X genoemd.

   a. Geef de momentgenererende functie van X in termen van de kansfunctie van X.

   b. Laat zien dat de tweede cumulant κ_2 van X gelijk is aan de variantie van X.

   c. Zij Y een van X onafhankelijke stochastische variabele met hetzelfde waardenbereik als X. Laat zien dat de n^e cumulant van $X + Y$ gelijk is aan de som van de n^e cumulanten van X en Y.

   d. Bepaal de cumulantgenererende functie van X als X een Poissonverdeling heeft met verwachtingswaarde 1. Bepaal ook alle cumulanten.

2. Een basketballtrainer heeft geconstateerd dat 22% van alle spelers langer is dan 2 meter, maar dat van alle goede spelers 50% langer is dan 2 meter. Van alle spelers is 30% goed (en de rest slecht).

   a. Bepaal de kans dat een willekeurig gekozen slechte speler langer is dan 2 meter.

   b. Bepaal de kans dat een willekeurig gekozen speler goed is als hij langer dan 2 meter blijkt te zijn.

3. Twee basketballspelers A en B staan op 10 meter afstand van elkaar. Ergens tussen A en B in, op de lijn die A en B verbindt, wordt een bal gelegd. Na een signaal rennen beide spelers naar de bal; wie het eerst bij de bal is heeft gewonnen. Zij X de afstand van de bal tot de startpositie van A. We nemen aan dat X uniform is verdeeld op [0,10] (meter). Bovendien veronderstellen we dat de versnelling van beide spelers constant is, namelijk 10 m/s^2 voor A en 8 m/s^2 voor B. (Dit betekent dus dat na t seconden A een afstand van $5t^2$ en B een afstand van $4t^2$ heeft afgelegd.) Zij T het tijdstip waarop de bal wordt veroverd.

   a. Bepaal de kans dat A wint.

   b. Bepaal $P(T \leq t \,|\, \text{A wint})$ voor $t \geq 0$.

   c. Bepaal de kansdichtheid van T.

   d. Hoe lang duurt het gemiddeld voordat de bal wordt veroverd?

Z.O.Z.

4. De stochastische variabelen X en Y hebben de simultane kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} c(6 - x - y) & \text{als } 0 < x < 2 \text{ en } 2 < y < 4 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

a. Bereken c.

b. Bereken $P(Y - X < 2)$.

c. Bepaal de marginale kansdichtheid van X.

d. Bepaal de voorwaardelijke kansdichtheid van Y, gegeven $X = 1$.

e. Bereken $E(1/(6 - X - Y))$.

5. De stochastische variabelen $X_1, X_2, \ldots,$ zijn onderling onafhankelijk en gelijk verdeeld met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Zij $S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$

a. Bepaal de covariantie van S_1 en S_2.

b. Geef een benadering voor $P(|S_{200} - 400| < 20)$ in termen van de standaardnormale verdelingsfunctie $\Phi(x),\ x \geq 0$, met behulp van de Centrale Limietstelling.

6. In een doos zitten 4 lampjes, twee van type A en twee van type B. Men neemt willekeurig twee lampjes uit de doos en verbindt deze in serie. De lampjes in een schakeling gaan onafhankelijk van elkaar kapot. De levensduur van een lampje is exponentiëel verdeeld met parameter a voor een lampje van type A en b voor een lampje van type B. Zij N het aantal lampjes van type A in de schakeling en T de levensduur van de schakeling.

a. Bepaal de kansfunctie van N.

b. Geef de voorwaardelijke kansdichtheid en de voorwaardelijke verwachting van T gegeven $N = 1$.

c. Bepaal $E(T)$.

d. Bepaal $E(T \mid T > 2)$.

Normering:

1				2		3				4					5		5			
a	b	c	d	a	b	a	b	c	d	a	b	c	d	e	a	b	a	b	c	d
1	2	2	3	2	2	2	2	3	1	1	2	2	2	2	2	3	1	2	2	2

Eindcijfer: $\frac{\text{Totaal}}{41} \times 9 + 1$ (afgerond)