PROEF–TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA voor TWTNCT (152120)

Donderdagmorgen 17 Maart 2005

Opmerking vooraf: Geef duidelijk aan welke stelling(en) uit het boek u bij een bewijs of berekening gebruikt. Bij een berekening kunt u NIET volstaan met alleen de uitkomst. Gebruik van de calculator of de grafische rekenmachine is toegestaan, echter alleen als controle. Het gebruik van een mobiele telefoon is verboden.

Opgave 1 Gegeven is het volgende inhomogene stelsel (nonhomogeneous system) $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ bestaande uit vier vergelijkingen (equations) in vijf onbekenden (variables) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrl}
 & 2 \cdot x_1 & + & 4 \cdot x_2 & - & 1 \cdot x_3 & + & 5 \cdot x_4 & - & 2 \cdot x_5 & = & 0 \\
- & 4 \cdot x_1 & - & 5 \cdot x_2 & + & 3 \cdot x_3 & - & 8 \cdot x_4 & + & 1 \cdot x_5 & = & 0 \\
 & 2 \cdot x_1 & - & 5 \cdot x_2 & - & 4 \cdot x_3 & & & + & 8 \cdot x_5 & = & -1 \\
- & 6 \cdot x_1 & & & + & 7 \cdot x_3 & - & 3 \cdot x_4 & + & \alpha \cdot x_5 & = & \beta \qquad \text{waarbij } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.
\end{array}$$

De matrix A is de 4×5–coëfficiëntenmatrix behorende bij het bovenvermelde inhomogene stelsel van lineaire vergelijkingen $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$. De gegeven vector $\vec{b} = (0, 0, -1, \beta)^T \in \mathbb{R}^4$ wordt gelezen als een kolomvector.

(a) Voor willekeurige $\alpha \in \mathbb{R}$, laat zien dat $(7, -2, 6, 0, 0)^T \in Nul(A)$.

(b) Voor willekeurige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, bepaal de standaard rijvorm (trapvorm, echelon form) van de aangevulde (augmented) 4×6–matrix $[A|\vec{b}]$.

(c) Voor $\alpha = -2$ bepaal

(c1) de kanonieke rijvorm (reduced echelon form) van de matrix A

(c2) de rang (rank) van matrix A

(c3) een basis en de dimensie (dimension) van de nul–ruimte (null space) $Nul(A)$, d.w.z. de oplosverzameling (solution set) van het homogene stelsel $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

(c4) alle waarden van β waarvoor het inhomogene stelsel $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ oplosbaar is, en presenteer de bijbehorende oplosverzameling van het inhomogene stelsel $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ in parameter vorm.

(d) Voor willekeurige $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -2$, bepaal

(d1) de kanonieke rijvorm (reduced echelon form) van de matrix A

(d2) de oplosverzameling van het homogene stelsel $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

(d3) een basis van de kolomruimte (column space) $Kol(A)$ en schrijf de derde kolom van matrix A als een lineaire combinatie van de overige kolommen.

Opgave 2 Beschouw de volgende 3×3–matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 1 \\ -4 & 0 & 8 \\ 7 & -3 & \alpha \end{bmatrix}$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Voor willekeurige $\alpha \in \mathbb{R}$, bepaal de determinant $det(A)$ van de matrix A als polynoom van α op de volgende twee manieren:

(a1) met behulp van de cofactor ontwikkeling naar de *eerste* rij van de matrix A (cofactor expansion across the first row of A).

(a2) met behulp van de veegprocedure (hint: vegen met een of andere kolom). Vergelijk uw huidig antwoord met het antwoord uit onderdeel (a1).

(b) Voor $\alpha = -11$, bereken de inverse A^{-1} van matrix A door de schoonveegprocedure (row reduction algorithm) toe te passen op $[A \mid I_{3\times 3}]$.

Antwoord (zelf berekenen): $\quad A^{-1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} -24 & 91 & 64 \\ -12 & 40 & 28 \\ -12 & 47 & 32 \end{bmatrix}$

(c) Bereken het uitproduct (cross product) van de eerste en tweede kolom van de matrix A en bereken vervolgens het inproduct (inner product) van de verkregen vector met de derde kolom van matrix A.

Opgave 3 Gegeven is de symmetrische 3×3–matrix $\quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

(a) Laat zien dat de vector $\vec{v} = (1, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$, gelezen als een kolomvector, een eigenvector van de matrix A is. Bepaal de bijbehorende eigenwaarde (eigenvalue) λ van de matrix A.
(b) Toon aan dat de karakteristieke vergelijking (characteristic equation) $p_A(\lambda) = 0$ van matrix A gegeven wordt door $\lambda^3 - 12 \cdot \lambda^2 + 39 \cdot \lambda - 28 = 0$.
(c) Bepaal alle eigenwaarden (eigenvalues) van matrix A en de bijbehorende eigenvectoren van matrix A. Waarom is de matrix A diagonaliseerbaar (diagonalizable) ?
(d) Vermeld een 3×3-diagonaalmatrix D en een inverteerbare 3×3-matrix P zodanig dat geldt $A = PDP^{-1}$. Controleer de laatstgenoemde relatie met behulp van het rekenwerk betreffende onderlinge matrixproducten tussen de vermelde matrices D, P en A.
(e) Beschouw het *continue* dynamische systeem (continuous dynamical system) beschreven door de matrix differentiaal vergelijking (differential equation) $\vec{x}'(t) = A \cdot \vec{x}(t)$, waarbij de vectorwaardige functie $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3$ voldoet aan de beginvoorwaarde $\vec{x}(0) = (0, 0, 1)$. Voor elke component $i = 1, 2, 3$, bepaal de functie $x_i(t)$ in een expliciete vorm als functie van de tijdsvariabele t (bijvoorbeeld, de eerste component $x_1(t)$ in expliciete vorm wordt gegeven door $x_1(t) = 2 \cdot e^t + 2 \cdot e^{4t} + e^{7t}$).

Normering **Totaal:** **36 + 4 = 40 punten**

1.a	1.0 pnt	1.d1	2.0 pnt	2.a1	2.0 pnt	4.a	1.0 pnt
1.b	2.0 pnt	1.d2	2.0 pnt	2.a2	2.0 pnt	4.b	2.5 pnt
1.c1	2.0 pnt	1.d3	3.0 pnt	2.b	3.0 pnt	4.c	2.5 pnt
1.c2	1.0 pnt			2.c	2.0 pnt	4.d	1.0 pnt
1.c3	2.0 pnt					4.e	2.0 pnt
1.c4	3.0 pnt						

Opmerking: je kunt het overgrote deel van deze opgaven natuurlijk ook vliegensvlug oplossen met MAPLE. Probeer de welbekende MAPLE commando's uit !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

ANTWOORDEN met korte uitleg

Opgave 1
(a) Gegeven de matrix A en de vector $\vec{x} = (7, -2, 6, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^5$, bereken het matrix-vector product $A \cdot \vec{x}$.
(b) Voor willekeurige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, de standaard rijvorm van de aangevulde 4×6–matrix $[A|\vec{b}]$ is

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha+2 & \beta+4 \end{bmatrix}$$

(c1) Voor $\alpha = -2$, de kanonieke rijvorm van de matrix A is

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-7}{6} & 0 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c2) $rang(A) = 3$ omdat er drie pivot kolommen (eerste, tweede, vierde kolom) zijn
(c3) $Nul(A) = SPAN\{\vec{v}_1, \quad \vec{v}_2\}$ waarbij $\vec{v}_1 = (7, -2, 6, 0, 0)^T$, $\vec{v}_2 = (1, 10, 0, -6, 6)^T$. Dus de nul–ruimte heeft dimensie twee, met basis $\{\vec{v}_1, \quad \vec{v}_2\}$. Eventueel dimensie van nul–ruimte bepalen zonder rekenwerk mbv de dimensie-stelling $dimNul(A) = n - rang(A) = 5 - 3 = 2$.
(c4) Uit de vierde rij van de standaardrijvorm blijkt dat het inhomogene stelsel $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ oplosbaar is dan en slechts dan als $\beta + 4 = 0$, d.w.z. $\beta = -4$, en de bijbehorende oplosverzameling (in parameter vorm) van het inhomogene stelsel $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ is gelijk aan $\vec{p} + SPAN\{\vec{v}_1, \quad \vec{v}_2\}$ waarbij $\vec{p} = \frac{1}{6} \cdot (7, 4, 0, -6, 0)^T \in \mathbb{R}^5$ en $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ als bovenvermeld. Merk op dat de vector $\vec{p}$ op te vatten is als een particuliere oplossing van het inhomogene stelsel $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.
(d1) Voor willekeurige $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -2$, de kanonieke rijvorm van de matrix A is

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-7}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d2) $Nul(A) = SPAN\{\vec{v}_1\}$ waarbij $\vec{v}_1 = (7, -2, 6, 0, 0)^T$ (als boven).
(d3) Er zijn vier pivot kolommen (de eerste, tweede, vierde en vijfde kolom), dus de vier kolommen $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4, \vec{a}_5\}$ van matrix A vormen een basis van $Kol(A)$ en voor de derde kolom $\vec{a}_3$ van matrix A is uit de kanonieke vorm af te lezen dat geldt $\vec{a}_3 = \frac{-7}{6} \cdot \vec{a}_1 + \frac{1}{3} \cdot \vec{a}_2$, uitgeschreven als $(-1, 3, -4, 7)^T = \frac{-7}{6} \cdot (2, -4, 2, -6)^T + \frac{1}{3} \cdot (4, -5, -5, 0)^T$

Opgave 2 Beschouw de volgende 3×3–matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 1 \\ -4 & 0 & 8 \\ 7 & -3 & \alpha \end{bmatrix}$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) determinant van matrix A is $-32 \cdot \alpha - 364$
(a2) vegen met de eerste kolom om de derde kolom aan te passen, d.w.z. derde kolom := derde kolom + 2$\cdot$ eerste kolom. Derhalve, $det(A) = -(-4) \cdot \begin{bmatrix} -8 & 7 \\ -3 & \alpha + 14 \end{bmatrix}$ enz. enz.

(b) Voor $\alpha = -11$, het begin van het meest handige rekenwerk is als volgt (denk aan rijverwisseling):

$$[A \mid I_{3\times 3}] = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & \frac{-1}{4} & 0 \\ 3 & -8 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nu vegen met de eerste rij om de tweede en derde rij aan te passen (op trapvorm te brengen) enz enz. Later nogmaals een rijverwisseling toepassen om handig rekenwerk te creeren. Voor $\alpha = -11$, de inverse van matrix A is $A^{-1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} -24 & 91 & 64 \\ -12 & 40 & 28 \\ -12 & 47 & 32 \end{bmatrix}$

(c) Het uitproduct van de eerste en tweede kolom van de matrix A is gelijk aan $(12, -47, -32)^T$ en het gevraagde inproduct $(12, -47, -32)^T \cdot (1, 8, \alpha)^T = 12 - 376 - 32\alpha = -32 \cdot \alpha - 364$ (hetgeen overeenkomt met de determinant van matrix A volgens de theorie).

Opgave 3 Gegeven is de symmetrische 3×3–matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

(a) Mbv rekenwerk controleer dat $A\vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ met de keuze $\lambda = 7$ na rekenwerk.
(b) De karakteristieke vergelijking $p_A(\lambda) = 0$ wordt afgeleid uit de berekening van $p_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot I_{n\times n})$. De berekening van de desbetreffende determinant kan mbv van beide cofactoren in de eerste rij, dus als volgt:

$$det(A - \lambda \cdot I_{n\times n}) = (3 - \lambda) \cdot det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 5 - \lambda \end{bmatrix} - 2 \cdot det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (3 - \lambda) \cdot [(4 - \lambda) \cdot (5 - \lambda) - 4] - 4 \cdot (5 - \lambda) = (3 - \lambda) \cdot [\lambda^2 - 9 \cdot \lambda + 16] - 20 + 4 \cdot \lambda = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= -\lambda^3 + 12 \cdot \lambda^2 - 39 \cdot \lambda + 28$$

(c) De drie eigenwaarden van matrix A zijn 1, 4, en 7 met bijbehorende eigenvectoren $\vec{v}_1 = (2, -2, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, -2)$, en $\vec{v}_3 = (1, 2, 2)$. Vermeld op een zorgvuldige manier al uw rekenwerk. De 3×3-matrix A is diagonaliseerbaar vanwege drie verschillende eigenwaarden (in feite is elke symmetrische matrix diagonaliseerbaar).
(d) $D = diag(1, 4, 7)$ en de inverteerbare matrix P heeft als drie kolommen de drie eigenvectoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, en $\vec{v}_3$, dwz. $P = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3]$
(e) De eerste, tweede, en derde component van $\vec{x}(t)$ in expliciete vorm worden gegeven door $x_1(t) = 2 \cdot e^t + 2 \cdot e^{4t} + e^{7t}$, $x_2(t) = -2 \cdot e^t + e^{4t} + 2 \cdot e^{7t}$, en $x_3(t) = e^t - 2 \cdot e^{4t} + 2 \cdot e^{7t}$ respectievelijk.

VEEL SUCCES bij het tentamen op woensdagmiddag 6 APRIL 2005

docent Theo DRIESSEN gebouw Ravelijn kamer H 209
toestel (053) 489-3938 E-mail: t.s.h.driessen@ewi.utwente.nl