Tentamen Lineaire Structuren 1 voor TW (201100100)
dinsdag 6 november 2012; 8.45 - 11.45 uur

Dit tentamen bestaat uit 8 opgaven. Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een (grafische) rekenmachine mag alleen gebruikt worden ter controle.

1. [2pt] Een verzameling V bestaat uit vectoren (a_1, a_2, a_3) met $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Optelling en scalaire vemenigvuldiging zijn gedefinieerd als volgt:

$$(a_1, a_2, a_3)+(b_1, b_2, b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3), \quad c(a_1, a_2, a_3) = (ca_1, ca_2, 0), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Is V een vectorruimte over $\mathbb{R}$? Motiveer uw antwoord.

2. [3pt] Gegeven is $S \subseteq P_2(\mathbb{R})$:

$$S = \{3x^2 + 2x + 1, -4x^2 + x - 1, x^2 + 1, -2x + 2\}.$$

Ga na of S een basis bevat voor $P_2(\mathbb{R})$. Zo ja, geef een voorbeeld van $\beta \subseteq S$ zodat β een basis is voor $P_2(\mathbb{R})$. Zo nee, waarom niet?

3. [3pt] V is een lineaire ruimte en $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ is een lineair deelverzameling in V. Bewijs dat S lineair afhankelijk is dan en slechts dan als één van de vectoren in S een lineaire combinatie is van andere vectoren in S.

4. Gegeven is een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-b & b-c \\ b+c & a-b \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(a) [2pt] Is T surjectief(onto)? Motiveer uw antwoord.

(b) [2pt] Neem

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bepaal $[T]_\beta^\gamma$.

(c) [2pt] Ga na dat voor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ geldt $[T(x)]_\gamma = [T]_\beta [x]_\beta$.

Z.O.Z.

5. $T : V \to W$ is een lineaire afbeelding.

(a) [2pt] Geef de definitie van de kern $N(T)$ van T.

(b) [3pt] Bewijs dat als $N(T) = \{\mathbf{0}\}$ dan is T injectief (one-to-one).

6. Gegeven is een lineair systeem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +2x_2 & -5x_3 & & -x_5 & = 4 \\ 2x_1 & +5x_2 & -8x_3 & +4x_4 & +3x_5 & = 2 \\ -3x_1 & -9x_2 & +9x_3 & -7x_4 & -2x_5 & = -14 \end{array}$$

(b) [4pt] Los het systeem op. Geef de algemene oplossing van dit systeem. Geef twee mogelijke particuliere oplossingen van dit systeem.

(c) [2pt] Bepaal de basis en de dimensie voor de oplossingsverzameling K_H van het bijbehorende homogeen systeem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(d) [2pt] B is een 4×7 matrix. Het systeem $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft 4 vrije variabelen. Is het systeem $B\mathbf{x} = \mathbf{d}$ consistent voor elke $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^4$?

7. (a) [2pt] Gegeven zijn twee matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} d & c & a \\ h & g & e \\ l & k & i \end{pmatrix},$$

waarbij $a, b, \ldots$ willekeurige reële getallen zijn. Bepaal de matrix C, die niet afhangt van $a, b, \ldots$, zodat $AC = B$.

(b) [2pt] D is een $n \times n$ matrix en O is een $n \times n$ nul-matrix. Laat zien dat als $D^2 = O$ dan is D niet inverteerbaar.

8. (a) [3pt] Bepaal het volume van een blok bepaald door de vectoren $(1, 1, 0)$, $(5, -1, -4)$, $(2, 3, 1)$.

(b) [2pt] Gebruik het verband tussen determinant en volume om uit te leggen waarom de determinant van een 3×3 matrix met linear afhankelijke kolommen gelijk is aan nul.

Totaal: 36 punten

NB: cijfer=[[aantal punten]+4]/4, afgerond naar een heel getal.