Tentamen Lineaire Structuren II, Vakcode 201100101.

Datum	:	18 april 2013
Plaats	:	??
Tijd	:	13.45 – 16.45

Alle antwoorden moeten gemotiveerd worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Gegeven is de matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.
   (b) Toon aan dat A diagonaliseerbaar is, en bepaal Q zodanig dat $A = Q\Lambda Q^{-1}$ met Λ een diagonaal matrix.
   (c) Bepaal A^5.
   Opmerking: $1^5 = 1$, $2^5 = 32$, $3^5 = 243$ en $4^5 = 1024$.

2. Zij $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ de (complexe) vectorruimte opgespannen door de functies $1, x$ en x^2. Op deze ruimte geven we het volgende (kandidaat) inproduct
$$\langle f, g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + f(1)\overline{g(1)} + f(-1)\overline{g(-1)}. \tag{1}$$
   (a) Toon aan dat (1) een inproduct op $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ definieert.
   (b) Bepaal t.o.v. het inproduct (1) een orthonormale basis van $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.
   (c) Bepaal de afstand van de functie x^2 tot de ruimte opgespannen door 1 en x.

3. Zij V een (eindig dimensionale) inproductruimte en zij T een lineaire afbeelding van V naar V. De singuliere waarden van T zijn gedefinieerd als de wortel uit de eigenwaarden van T^*T. Dus als de eigenwaarden van T^*T gelijk zijn aan $1, 4, 9$ en 121, dan zijn de singuliere waarden gelijk aan $1, 2, 3$ en 11.
   (a) Bewijs dat de eigenwaarden van T^*T reëel zijn.
   (b) Bewijs dat de eigenwaarden van T^*T niet negatief zijn. Concludeer dat de singuliere waarden niet negatief zijn.
   (c) Als T inverteerbaar is, toon aan dat de singuliere waarden van T en T^* gelijk zijn.
   (d) Toon aan dat als de grootste singuliere waarde van T gelijk is aan nul, dat dan T gelijk is aan de nul afbeelding.

Z.O.Z.

4. Zij S de lineaire afbeelding van $\mathbb{C}^n$ naar $\mathbb{C}^n$ gegeven door

$$S(x_1, x_2, x_3 \cdots, x_{n-1}, x_n) = (ix_2, (i)^2 x_3, (i)^3 x_4, \cdots, (i)^{n-1} x_n, (i)^n x_1).$$

   (a) Toon aan dat S unitair is.

   (b) Bepaal S^n en het karakteristieke polynoom.

   (c) Is S ook unitair op $\mathbb{C}^n$ met het inproduct

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} (2 - (-1)^k) x_k \overline{y_k}?$$

5. Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ met inproduct, zie opgave 2:

$$\langle f, g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + f(1)\overline{g(1)} + f(-1)\overline{g(-1)}. \qquad (2)$$

Verder is de volgende afbeelding van $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ naar $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ gegeven;

$$(Tf)(x) = f(x+1).$$

Dus als $f(x)$ gelijk is aan $x^2 + 5x$, dan is $(Tf)(x)$ gelijk aan $x^2 + 7x + 6$.

   (a) Bepaal T^*.

   (b) Bepaal de Jordan canonieke vorm van de afbeelding T.

   (c) Ten opzichte van welke basis heeft T deze Jordan canonieke vorm?

Puntenverdeling[1]

Som 1		Som 2		Som 3		Som 4		Som 5	
a	8	a	8	a	6	a	6	a	6
b	4	b	6	b	5	b	6	b	4
c	6	c	6	c	5	c	4	c	6
				d	4				

[1]Totaal is 100. U krijgt 10 punten gratis