Tentamen Lineaire Structuren II, Vakcode 201100101.

Datum	:	27 januari 2014
Plaats	:	CR-2K
Tijd	:	08.45 – 11.45

Alle antwoorden moeten gemotiveerd worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Zij $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(t) = a + bt + ce^{3t}, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ en definieer daarop de lineaire afbeelding $T : V \to V$

$$(T(p))(t) = p'(t) + p(0)t.$$

Hier betekent p' de afgeleide van p.

   (a) Bepaal de karakteristieke polynoom van T.

   (b) Bepaal alle eigenvectoren van T.

   (c) Is T diagonaliseerbaar?

2. Zij T en V zoals gegeven in opgave 1. Zij W de lineaire ruimte opgespannen door 1 en t. Toon aan dat W T-invariant is.

3. Beschouw de ruimte $P_2(\mathbb{R})$ van reële polynomen van graad 2 of lager, met daarop het inproduct

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f(t)g(t)\, dt.$$

   (a) Toon aan dat dit inderdaad een inproduct is op $P_2(\mathbb{R})$.

   (b) Zij W de lineaire deelruimte van $P_2(\mathbb{R})$ opgespannen door $\{1, t\}$. Bepaal een orthonormale basis van W

   (c) Bepaal, voor bovenstaand inproduct, de beste benadering in W van de tweegraads polynoom t^2.

Z.O.Z.

4. Zij $\mathbb{P}_9([-1,1])$ de complexe vectorruimte van polynomen $p : [-1,1] \to \mathbb{C}$ van graad 9 of lager. Beschouw $T : \mathbb{P}_9([-1,1]) \to \mathbb{P}_9([-1,1])$ gedefinieerd als

$$(T(f))\,(t) = i \cdot f(-t), \qquad t \in [-1,1].$$

Toon aan dat i en $-i$ eigenwaarden zijn van T.

5. Zij T en V zoals gegeven in opgave 4. Op de ruimte V hebben we het (standaard) inproduct

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

(a) Is T een unitaire afbeelding?

(b) Bepaal T^*.

(c) Heeft $\mathbb{P}_9([-1,1])$ een orthonormale basis van eigenvectoren van T?

6. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat de karakteristieke polynoom gelijk is aan $-(\lambda-4)^2(\lambda-2)$.

(b) Bepaal de Jordan canonieke vorm J van A.

(c) Bepaal een matrix Q zodanig dat $Q^{-1}AQ = J$.

Puntenverdeling[1]

Som 1		Som 2	Som 3		Som 4	Som 5		Som 6	
a	6	6	a	6	8	a	6	a	5
b	7		b	8		b	7	b	7
c	5		c	7		c	5	c	7

[1] Totaal is 100. U krijgt 10 punten gratis