

Tentamen Vectorcalculus voor TW

Vakcode 201100104

25 Juni, 2012

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
- Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

1. Gegeven de wet van Van der Waals voor niet ideale gassen en vloeistoffen

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = ct,$$

met p de druk, v het specifieke volume, t de temperatuur en constanten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bereken $\frac{\partial p}{\partial v}$ en $\frac{\partial v}{\partial t}$.

2. Gegeven de functie $f(x, y, z) := xy + z^2$ op de bol $B := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

- Bereken de kritieke punten van f in het inwendige van de bol B .
- Bereken de maximum en minimum waarden van f op de rand van de bol B met behulp van de methode van Lagrange.
- Bereken de maximum en minimum waarden van f op de bol B .

3. Gegeven de krommen:

$$\mathbf{u}(t) = \cos t \sin t \mathbf{i} + \sin^2 t \mathbf{j} + 4t \mathbf{k},$$

$$\mathbf{v}(t) = (2t - 2\pi) \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + (t + 3\pi) \mathbf{k},$$

met $t \in \mathbb{R}$.

- Bereken de eenheidsraakvectoren aan de krommen $\mathbf{u}(t)$ en $\mathbf{v}(t)$.
- Bereken $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t))$.
- Gegeven de kromme $C := \{\mathbf{u}(t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$. Bereken de integraal

$$\int_C \left(x + \ln\left(\frac{z}{4}\right)\right) ds.$$

4. Bereken de integraal

$$\iint_D y \sin(\sqrt{16x^2 + 25y^4}) dA$$

met $D := \{(x, y) \mid 16x^2 + 25y^4 \leq 1, y \geq 0\}$

Hint: gebruik de transformatie $x = Ar \cos \theta$ en $y = B\sqrt{r} \sin \theta$ met geschikt gekozen constantes $A, B \in \mathbb{R}$.

5. Bereken de integraal

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

met

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}.$$

Het oppervlak S is gegeven door de parametrizatie

$$\mathbf{r} = e^{2u} \cos v \mathbf{i} + e^{2u} \sin v \mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

met $0 \leq u \leq 1$ en $0 \leq v \leq \pi$. De normaalvector op S is naar beneden gericht (in de richting van de negatieve z -as).

6. Bereken de integraal

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

met $C := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4, 2x + y + z = 3\}$ met orientatie tegen de klok in wanneer bekeken voor grote waarden van z . Het vectorveld \mathbf{F} is gegeven door

$$\mathbf{F} = (z^2 + y^2 + \sin(x^2))\mathbf{i} + (2xy + z)\mathbf{j} + (xz + 2yz)\mathbf{k}.$$

Puntentelling

1:6	2a: 1	3a: 1	4: 7	5: 6	6: 5
	2b: 1	3b: 2			
	2c: 4	3c: 3			
6	6	6	7	6	5

totaal 36+4=40 punten