Tentamen Analyse 2

Vakcode 191521400

28 januari, 2015

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan

1. (a) Gegeven de functies:

$$f_n(x) = \log\sqrt{x^2 + 1/n^2}, \quad x \geq 1.$$

Is de convergentie van $f_n(x) \to f(x)$ voor $n \to \infty$ uniform? Motiveer je antwoord.

(b) Gegeven de functies:

$$f_k(x) = \frac{e^{-(x-k)^2}\log k}{k^2}.$$

Bepaal het interval waarop de functiereeks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ absoluut en uniform convergeert.

2. Gegeven de functie

$$f(x) = x\log x - x$$

(a) Laat zien dat

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m(m-1)}(x-1)^m - 1$$

de Taylorreeks van $f(x)$ rond het punt $x_0 = 1$ is.

(b) Wat is het convergentieinterval S van de Taylorreeks van $f(x)$ rond het punt $x_0 = 1$? Analyseer ook de randen van S.

(c) Op welk interval convergeert de Taylorreeks van $f(x)$ rond het punt $x_0 = 1$ uniform? Motiveer je antwoord.

3. Bewijs de volgende stelling:

   Zij $E \subseteq X$, met X een metrische ruimte. Dan is E gesloten dan en slechts indien de limiet van iedere convergente rij $x_k \in E$ voldoet aan

   $$\lim_{k \to \infty} x_k \in E.$$

4. Bewijs de volgende stelling:

   Zij $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, g een vectorfunctie van n variabelen naar m variabelen, en f een vectorfunctie van m variabelen naar p variabelen.

   Indien g differentieerbaar is op $\mathbf{a}$ en f differentieerbaar is op $g(\mathbf{a})$ dan is $f \circ g$ differentieerbaar op $\mathbf{a}$ en

   $$D(f \circ g)(\mathbf{a}) = Df(g(\mathbf{a}))Dg(\mathbf{a})$$

5. Gegeven de functie

   $$f(x,y) = \begin{cases} |xy|^\alpha \ln \sqrt{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Voor welke waarden van α is $f(x,y)$ continu is op $(0,0)$? (Hint, gebruik $|\ln a| = \ln \frac{1}{a}$ voor $0 < a < 1$.)

   (b) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ voor $(x,y) = (0,0)$.

   (c) Voor welke waarden van α is de functie $f(x,y)$ differentieerbaar op $(x,y) = (0,0)$?

6. Bereken

   $$\int\int_S \omega$$

   met $\omega = xdydz + ydzdx + z^2 dxdy$. Het oppervlak S is de elliptische kegel met $z = \sqrt{4x^2 + y^2}$ en $0 \leq z \leq 1$. De normaalvector op S moet van de z-as af gericht zijn.

   Hint, gebruik de transformatie $x = ar\cos\theta$ en $y = br\sin\theta$ met geschikt gekozen waarden voor de constanten a en b.

Puntentelling

1a: 3	2a: 3	3: 4	4: 4	5a: 4	6: 6
1b: 3	2b: 3			5b: 1	
	2c: 1			5c: 4	
6	7	4	4	9	6

totaal 36+4=40 punten