Tentamen Analyse 2

Vakcode 191521400

5 Juli, 2012

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan

1. (a) Gegeven de functie

$$g_n(x) = nxe^{-nx^2}, \qquad 0 \leq x \leq 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

   i. Bepaal de puntsgewijze limiet $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ voor $0 \leq x \leq 1$.

   ii. Is de convergentie van $g_n(x) \to g(x)$ uniform?
   Hint, gebruik $x > \ln x$ voor $x > 0$.

   (b) Gegeven de functie

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n^4 x e^{n^2 x}, && \text{voor } 0 \leq x < \frac{1}{n^2}, \\ &= 2n^2 e - n^4 e x, && \text{voor } \frac{1}{n^2} \leq x < \frac{2}{n^2}, \\ &= 0, && \text{voor } \frac{2}{n^2} \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

   Bereken $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$. Motiveer je antwoord.

2. Gegeven de functie

$$f(x) = \frac{x^4}{(1+2x)^2}$$

   (a) Bepaal de Maclaurin reeks van $f(x)$.

   (b) Wat is het convergentie interval S van de Maclaurin reeks van $f(x)$?

   (c) Laat zien dat de Maclaurin reeks van $f(x)$ absoluut en uniform convergeert op ieder gesloten interval $[a, b] \subset S$.

3. (a) Bewijs de volgende stelling:

   Zij X een volledige metrische ruimte en E een deelverzameling van X. Dan is E volledig dan en slechts dan indien E gesloten is.

(b) Geef de definitie van de Bolzano-Weierstrass eigenschap.

(c) Bewijs de Heine-Borel stelling:

Zij X een separabele metrische ruimte die de Bolzano-Weierstrass eigenschap heeft en H een deelverzameling van X. Dan is H compact dan en slechts dan indien H gesloten en begrensd is.

4. Gegeven de functie

$$f(x,y) = \begin{cases} (x-y)^2 \sin \frac{1}{x-y} & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

(a) Is de functie $f(x,y)$ continu op de lijn $y = x$?

(b) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ voor $x \neq y$.

(c) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ voor $x = y$.

(d) Bewijs dat de functie $f(x,y)$ differentieerbaar is op $(x,y) = (0,0)$.

5. (a) Geef de inverse functiestelling.

(b) Bewijs dat er functies $u(x,y)$, $v(x,y)$ en $w(x,y)$ en een $r > 0$ bestaan zodanig dat u, v, w continu differentieerbaar zijn en voldoen aan de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x \sin u + yv^2 - \ln w &= 0 \\ xw^2 + yu &= 1 \\ v^3 - u^2 + vw &= e \end{aligned}$$

op de bol $B_r(0,1)$ met $u(0,1) = 1$, $v(0,1) = 1$ en $w(0,1) = e$.

6. S is de doorsnijding van de elliptische cylinder $4y^2 + 2z^2 \leq 1$ en het vlak $x = y$, met de normaalvector in de richting van de postieve y-as.

Bereken met behulp van de stelling van Stokes de integraal

$$\int_S xdydz - ydzdx + \sin ydxdy.$$

Hint, bepaal eerst een eenvoudig vectorveld $\mathbf{G}$ met $\operatorname{curl} \mathbf{G} = \mathbf{F}$. Gebruik voor ∂S de parametrisatie $x = y = \frac{1}{2} \sin t$ en $z = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t$.

Puntentelling

1a.i: 1	2a: 2	3a: 3	4a: 1	5a: 2	6: 6
1a.ii 3	2b: 1	3b: 1	4b: 1	5b: 3	
1b: 2	2c: 3	3c: 4	4c: 1		
			4d: 2		
6	6	8	5	5	6

totaal 36+4=40 punten