Tentamen Analyse 2

Vakcode 191521400

22 Augustus, 2012

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan

1. (a) Gegeven de functie:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Is de convergentie van $f_n(x) \to f(x)$ uniform?

(b) Gegeven de functiereeks:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\arctan(3^n x^2))}{2^n}, \quad x \in [-1, 1].$$

Is de convergentie van de functiereeks uniform?

2. Gegeven de functie

$$f(x) = x^4 \arctan(x/3)$$

(a) Laat zien dat $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} x^{2k+5}$ de Maclaurinreeks van $f(x)$ is.

(b) Wat is het convergentieinterval S van de Maclaurinreeks van $f(x)$? Analyseer ook de randen van S.

3. (a) Bewijs de volgende stelling:

Zij X en Y metrische ruimtes en $f : X \to Y$.

De functie f is continu dan en slechts dan indien $f^{-1}(V)$ open is in X voor iedere open V in Y.

(b) Bewijs de volgende stelling:

Zij H een compacte verzameling in X en $f : H \to Y$ een continue functie op H. Dan is $f(H)$ compact in Y.

4. Gegeven de functie

$$f(x,y) = \begin{cases} (x-3y)^2 \arctan \frac{1}{x-3y} & x \neq 3y, \\ 0, & x = 3y. \end{cases}$$

   (a) Is de functie $f(x,y)$ continu voor $x = 3y$? Gebruik de $\epsilon - \delta$ definitie voor continuiteit.

   (b) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ voor $x \neq 3y$.

   (c) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ voor $x = 3y$. Gebruik de definitie van de partiële afgeleides.

   (d) Bewijs dat de functie $f(x,y)$ differentieerbaar is op $(x,y) = (0,0)$. Gebruik de definitie van de afgeleide.

5. (a) Geef de impliciete functiestelling.

   (b) Gegeven de getallen x_0, y_0, u_0, v_0, s_0, t_0 die allen ongelijk aan nul zijn en voldoen aan de volgende vergelijkingen:

$$u^2 + sx + ty = 0, \tag{1}$$
$$v^2 + tx + sy = 0 \tag{2}$$
$$2s^2x + 2t^2y - 1 = 0 \tag{3}$$
$$s^2x - t^2y = 0 \tag{4}$$

   Bewijs dat er functies $u(x,y), v(x,y), s(x,y), t(x,y)$ en een open bol B bestaan die (x_0, y_0) bevat, zodanig dat u, v, s, t continu differentieerbaar zijn en voldoen aan de vergelijkingen (1)-(4) op B en $u(x_0,y_0) = u_0$, $v(x_0,y_0) = v_0$, $s(x_0,y_0) = s_0$, $t(x_0,y_0) = t_0$.

6. Bereken

$$\int\int_S \omega$$

   met $\omega = xdydz + ydzdx + z^2dxdy$. Het oppervlak S is de elliptische kegel met $z = \sqrt{4x^2+y^2}$ en $0 \leq z \leq 1$. De normaalvector op S moet van de z-as af gericht zijn.

   Hint, gebruik de transformatie $x = ar\cos\theta$ en $y = br\sin\theta$ met geschikt gekozen waarden voor de constanten a en b.

Puntentelling

1a: 3	2a: 3	3a: 4	4a: 1	5a: 2	6: 6
1b: 3	2b: 3	3b: 4	4b: 1	5b: 3	
			4c: 1		
			4d: 2		
6	6	8	5	5	6

totaal 36+4=40 punten