Tentamen Analyse 2

Vakcode 191521400

30 Oktober, 2012

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan

1. (a) Gegeven de functies:

$$f_n(x) = \log \sqrt{x^2 + 1/n^2}, \quad x \geq 1.$$

Is de convergentie van $f_n(x) \to f(x)$ voor $n \to \infty$ uniform? Motiveer je antwoord.

(b) Gegeven de functies:

$$f_k(x) = \frac{e^{-(x-k)^2} \log k}{k^2}.$$

Bepaal het interval waarop de functiereeks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ absoluut en uniform convergeert.

2. Gegeven de functie

$$f(x) = x \log x - x$$

(a) Laat zien dat

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m(m-1)} (x-1)^m - 1$$

de Taylorreeks van $f(x)$ rond het punt $x_0 = 1$ is.

(b) Wat is het convergentieinterval S van de Taylorreeks van $f(x)$ rond het punt $x_0 = 1$? Analyseer ook de randen van S.

(c) Op welk interval convergeert de Taylorreeks van $f(x)$ rond het punt $x_0 = 1$ uniform? Motiveer je antwoord.

3. (a) Bewijs de volgende stelling: Zij $E \subseteq \mathbb{R}$ en veronderstel dat $f_n \to f$ uniform convergeert op E voor $n \to \infty$. Indien iedere f_n continu is op een punt $x_0 \in E$, dan is f continu op $x_0 \in E$.

(b) Veronderstel dat $f_n \to f$ uniform convergeert op een gesloten interval $[a,b]$. Indien f_n integreerbaar is op $[a,b]$ dan is f ook integreerbaar en

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx.$$

4. (a) Geef de definitie van open, gesloten en compacte verzamelingen. Definieer ook de begrippen die je hierbij gebruikt.

   (b) Bewijs de volgende stelling: Zij E een compacte deelverzameling van een metrische ruimte X en $f : X \to Y$.

   Dan is f uniform continu op E d.s.d. indien f continu is op E.

5. Gegeven de functie

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{|x-y|}\exp\left(\frac{-1}{(x-y)^2}\right), & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

   (a) Is de functie $f(x,y)$ continu voor $x = y$? Gebruik de $\epsilon - \delta$ definitie voor continuiteit.

   (b) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ voor $x \neq y$.

   (c) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ voor $x = y$. Gebruik de definitie van de partiële afgeleides.

   (d) Zijn de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ continu op $x = y$?

   (e) Is de functie $f(x,y)$ differentieerbaar op $(x,y) = (0,0)$? Motiveer je antwoord.

6. Bereken

$$\int\int_S \omega$$

met $\omega = y^3 dydz + 2xzdzdx + y(x^2+z^2)dxdy$. Het oppervlak S is gedefinieerd als $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = \sqrt{4-x^2-z^2},\ x \geq z\}$. De normaalvector op S wijst in de positieve y-richting.