Tentamen
Lineaire Analyse (151124)

Datum: 01-02-2012
Plaats: SC
Tijd: 13:45-16:45

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Beschouw de ruimte van 2×2 matrices, $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Hierop definiëren we de deelverzameling

$$\mathbb{W} = \{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a_{11} = a_{22} \}.$$

   (a) Toon aan dat $\mathbb{W}$ een deelruimte is van $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (b) Bepaal een basis van $\mathbb{W}$.

   (c) Bepaal de dimensie van $\mathbb{W}$.

2. Beschouw de afbeelding $\mathcal{A} : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gedefinieerd als

$$(\mathcal{A}f)(t) = (t+1)f'(t+1)$$

   (a) Bepaal de matrix A_{SS} van de afbeelding, waarbij $S = \{1, t, t^2\}$.

   (b) Bepaal alle eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{A}$. Schrijf de eigenvectoren als elementen van $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Geef de definitie van Banachruimte.

4. Beschouw de complexe vectorruimte $\mathscr{P}_2([-1,1],\mathbb{C})$ met standaard-inproduct $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\,dt$. Zij $\mathbb{W}$ de deelruimte van $\mathscr{P}_2([-1,1],\mathbb{C})$ opgespannen door de polynomen $\{1, t^2\}$,

$$\mathbb{W} = \operatorname{span}\{1, t^2\}.$$

   (a) Bepaal een orthonormale basis voor $\mathbb{W}$.

   (b) Bepaal de beste approximatie in $\mathbb{W}$ van $p(t) := \mathrm{i} + t$.
   (Let wel, i is hier de imaginaire eenheid, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.)

5. Gegeven is een inproductruimte $\mathbb{X}$ en twee vectoren $y_0, z_0 \in \mathbb{X}$ met zowel y_0 als z_0 ongelijk aan nul. Beschouw de afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ gedefinieerd als

$$\mathcal{A}(x) = \langle x, y_0\rangle\, z_0.$$

   (a) Toon aan dat $\mathcal{A}$ een lineaire afbeelding is van $\mathbb{X}$ naar $\mathbb{X}$ (u moet dus ook aantonen dat $\mathcal{A}(x) \in \mathbb{X}$ als $x \in \mathbb{X}$).

   (b) Bepaal $\mathcal{A}^*$.

   (c) Laat zien dat $\|\mathcal{A}\| \leq \|y_0\|\|z_0\|$ (Hint: gebruik Cauchy-Schwarz).

   (d) Bepaal $\|\mathcal{A}\|$.

   (e) Bepaal de eigenwaarde(n) van $\mathcal{A}$.

6. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld voor de volgende bewering:

   Zij $n \in \mathbb{N}$.
   Elk orthonormaal stelsel $\{v_1, \ldots, v_n\}$ is lineair onafhankelijk?

opgave:	1	2	3	4	5	6
punten:	3+4+2	3+4	3	4+4	4+5+3+2+4	4

Het totaal aantal punten is 49. Het tentamencijfer is $1 + p/10$ met p het behaalde aantal punten.