Toets Markov chains, blok 2, module 8 (201400434)
Woensdag 17 juni 2015 van 8.45 - 11.45 uur
Coordinator en docent: W.R.W. Scheinhardt

Tevens toets Markov ketens oude stijl (191530651)

Deze toets bevat 3 opgaven (opgave 4 is alleen voor oude stijl)
Gebruik van een eenvoudige (niet-grafische) rekenmachine is toegestaan
Gebruik van het boek is niet toegestaan
Motiveer uw antwoorden

1. We veronderstellen dat aardbevingen op Java optreden volgens een Poissonproces met intensiteit 0.8 per jaar. We maken daarbij onderscheid tussen 'lichte' en 'zware' aardbevingen. De kans dat een aardbeving licht is, is 0.95 en onafhankelijk van overige omstandigheden.

   a. Geef één van de definities voor een Poissonprocess met intensiteit λ.

   b. Bepaal de kans dat er in de periode 2016 tot en met 2018 precies één zware beving en drie lichte bevingen zullen voorkomen.

   c. We leven nu in juni 2015. In welk jaar verwacht u de eerste zware aardbeving, gegeven dat de vorige in april 2011 optrad?

   d. Vindt u de aanname dat aardbevingen volgens een Poissonproces optreden gerechtvaardigd? Waarom wel of niet?

2. Beschouw een discrete tijd Markovketen $\{X_n\}$.

   a. De notatie $i \leftrightarrow j$ betekent dat i en j communiceren. Bewijs dat als $i \leftrightarrow j$ en $j \leftrightarrow k$, dan ook $i \leftrightarrow k$.

   b. Kan er een *stationaire* verdeling bestaan als $\{X_n\}$ irreducibel, positief-recurrent, en *periodiek* is? Motiveer uw antwoord.

   Zij nu X_n het kapitaal van een gokker na het n^e spel en X_0 zijn beginkapitaal. Zolang de gokker geld heeft, zet hij bij ieder spel 1 euro in, waarna hij 0 of 2 euro terugkrijgt met kansen 0.6 en 0.4, resp. Wanneer de gokker geen geld meer heeft stopt hij met spelen, d.w.z. $X_n = 0 \Rightarrow X_{n+k} = 0$ voor $k = 1, 2, \dots$. Neem aan dat $\{X_n\}$ een Markov keten is, en dat $X_0 = 10$.

   c. Bepaal de communicerende klassen van de keten $\{X_n\}$, bepaal de periode van elke klasse en ga voor elke klasse na of deze transiënt, nul-recurrent of positief recurrent is.

   d. Bepaal de limietkansen $\lim_{n\to\infty} P(X_n = i | X_0 = 10)$ voor $i = 0, 1, \dots$.

   e. Geef een stelsel vergelijkingen waarmee de kans te bepalen is dat de gokker ooit 11 euro zal bezitten, voor hij failliet gaat (oplossen hoeft niet).

3. In een magazijn wordt een bepaald type product in voorraad gehouden. Op tijdstippen die worden gegenereerd door een Poisson proces met intensiteit 2 wordt telkens één exemplaar uit het magazijn verwijderd, zo lang de voorraad strekt. Zodra er nog één exemplaar op voorraad is gaat er een bestelling uit voor drie exemplaren, die echter pas na een exponentieel verdeelde tijd met verwachtingswaarde 1 worden afgeleverd. Zij $X(t)$ de grootte van de voorraad op tijdstip t en veronderstel dat $X(0) = 3$.
   a. Bepaal de generator matrix Q van de Markov keten $\{X(t)\}$.
   b. Het stelsel van Kolmogorov achterwaartse vergelijkingen (backward equations) bestaat uit 16 gekoppelde differentiaalvergelijkingen voor de overgangskansfuncties (transition probability functions) $P_{ij}(t)$. Geef (alleen) de vergelijking voor $P'_{1,2}(t) = \ldots$
   c. Pas uniformisatie toe op de Markov keten $\{X(t)\}$ met behulp van een geschikte uniformisatie-rate, en geef de overgangsmatrix P^* van de uniformiserende DTMC (discrete tijd Markov keten).
4. **Let op: opgave 4 is alleen voor toets oude stijl**
   We beschouwen een machine die telkens gerepareerd wordt wanneer hij kapot gaat. De opeenvolgende levensduren (in dagen) van de machine zijn onafhankelijk en uniform verdeeld op het interval [100,200]. Na de reparatie, die telkens precies 1 dag duurt, is de machine steeds weer als nieuw. Zij $N(t)$ het aantal (afgeronde) reparaties op of vóór tijdstip t (in dagen).
   a. Is $\{N(t)\}$ een vernieuwingsproces? Waarom wel/niet?
   b. Bepaal het verwachte aantal reparaties per jaar (van 365 dagen) op de lange duur; formuleer de stelling die u daarbij gebruikt.
   c. Welke fractie van de tijd is de machine op de lange duur in reparatie? Formuleer opnieuw de stelling die u gebruikt.

Normering nieuwe stijl (TOM-module):

1				2					3			Totaal
a	b	c	d	a	b	c	d	e	a	b	c	
2	3	2	1	3	2	3	2	2	2	2	3	27

Normering oude stijl:

1				2					3			4			Totaal
a	b	c	d	a	b	c	d	e	a	b	c	a	b	c	
2	3	2	1	3	2	3	2	2	2	2	3	3	3	3	36

In beide gevallen geldt cijfer $= \dfrac{\text{behaalde punten}}{\text{totaal aantal punten}} \times 9 + 1$ (afgerond)