Datum: 24 januari 2014

Tentamen Markovketens (191530651)
Maandag 27 januari 2014, 13.45 - 16.45 uur.

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven; voor theorieopgaven zie 1d, 3a, 4ab. Vermeld uw studentnummer op al uw werk. Gebruik van boek is niet toegestaan. Een (niet grafische!) rekenmachine is wel toegestaan. Motiveer al uw antwoorden. Enkele Nederlandse begrippen vertaald: intensiteit = rate   overgangskans = transition probability toestandsruimte = state space   vernieuwing = renewal

1. We beschouwen de finale van het wereldkampioenschap voetbal 2014 tussen Nederland en een nog onbekende tegenstander. We nemen aan dat gedurende deze wedstrijd doelpunten van Nederland en van de tegenpartij vallen volgens onafhankelijke Poissonprocessen met respectievelijke intensiteiten α en β (doelpunten per uur). De wedstrijd duurt 90 minuten, bestaande uit twee helften van elk 45 minuten.

   (a) Wat is de kans dat er in de eerste helft in totaal precies drie doelpunten vallen?

   (b) Gegeven dat de eindstand 2-1 voor Nederland wordt, wat is dan de kans dat deze stand al bij rust is bereikt (dus na het spelen van de eerste helft)?

   (c) Neem nu aan dat $\alpha = 2$ en $\beta = 1$ (zodat Nederland duidelijk favoriet is). Wat is de kans op een eindstand (na 90 minuten spelen) van 2-1 voor Nederland? En wat is de kans op 2-1 voor de tegenstander?

   (d) Is de aanname dat doelpunten vallen volgens Poissonprocessen eigenlijk wel redelijk? Waarom wel of niet?

2. Gegeven is een Markov keten $\{X_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ met oneindige toestandsruimte $\{0, 1, 2, \ldots\}$. De overgangsmatrix P van deze keten is gegeven door $P_{0,i} = p_i$ en $P_{i,0} = 1$ voor $i = 1, 2, \ldots$, met $p_i > 0$ en $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Verder is $P_{0,0} = 0$ en $P_{i,j} = 0$ voor $i \geq 1, j \geq 1$.

   (a) Bepaal de n-staps overgangskans $P_{0,1}^{(n)} = P(X_n = 1 \mid X_0 = 0)$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$.

   (b) Ga na of de keten irreducibel is, en geef aan welke toestanden recurrent zijn.

   (c) Bepaal de periode van toestand 1.

   (d) Bepaal de (unieke) stationaire verdeling in termen van de p_i, en geef een juiste interpretatie voor deze verdeling.

   (e) Bestaat $\lim_{n\to\infty} P_{0,1}^{(n)}$? Motiveer uw antwoord.

3. De toestand van een systeem dat aan veroudering onderhevig is wordt weergegeven door één van de toestanden $0, 1, \ldots, 10$, waarbij toestand 10 betekent dat het systeem "als nieuw" is. Op tijdstippen die gegenereerd worden door een Poissonproces met intensiteit λ daalt de toestand van het systeem met één eenheid, tenzij het systeem in toestand

Z.O.Z.

0 verkeert; in toestand 0 treedt geen veroudering meer op. Op tijdstippen die worden gegenereerd door een tweede, onafhankelijk Poissonproces met intensiteit μ ($\mu < \lambda$) vindt een revisie plaats waardoor de toestand van het systeem (onmiddelijk) weer 10 wordt. Zij $X(t)$ de toestand van het systeem op tijdstip t, dan is $\{X(t), t \geq 0\}$ een Markovketen.

(a) Geef de algemene definitie van een Markov keten in continue tijd (CTMC).

(b) Bepaal de transitie-intensiteiten $q_{i,j}$ van deze keten voor alle i, j in $\{0, 1, \ldots, 10\}$.

(c) Bepaal de limietkansen $\lim_{t\to\infty} P(X(t) = j)$ voor $j = 0, 1, \ldots, 10$, in termen van λ en μ. Hint: druk alle kansen uit in de limietkans voor toestand 0.

De overgangskans $P_{i,10}(t) = P(X(t) = 10 \mid X(0) = i)$ met $t \geq 0$ en $i = 0, 1, \ldots, 10$, is in dit geval te vinden door een eenvoudiger Markov-keten $\hat{X}(t)$ te bekijken met slechts twee toestanden.

(d) Definieer zo'n Markovketen $\hat{X}(t)$ in termen van $X(t)$, en druk de overgangskans $P_{i,10}(t)$ uit in de overgangskans(en) $\hat{P}_{i,j}(t)$ die bij $\hat{X}(t)$ horen.

(e) Geef de Kolmogorov voorwaartse vergelijkingen –zonder deze op te lossen– voor de overgangskansen $\hat{P}_{i,j}(t)$ van $\hat{X}(t)$. (Wanneer u bij opgave (d) geen antwoord heeft, ga er dan vanuit dat $\hat{X}(t)$ toestandsruimte $\{0, 1\}$ heeft, met transitie-intensiteiten $\hat{q}_{0,1} = \mu$ en $\hat{q}_{1,0} = \lambda$.)

4. Henk is een intensieve gebruiker van zijn mobiele telefoon, dus zodra zijn telefoon kapot gaat, koopt hij direct een nieuwe. Neem aan dat hij op 1 januari 2010 (we noemen dit tijdstip 0) een nieuwe telefoon aanschaft, die X_1 dagen meegaat. Algemener, noem X_i de tijdsduur (in dagen) dat hij de i-de telefoon in gebruik heeft. Zij $N(t)$ het aantal nieuwe telefoons dat Henk koopt tussen tijdstip 0 en t (in dagen, met $N(0) = 0$).

(a) Wat moeten we aannemen zodat $N(t)$ een vernieuwingsproces is?

Neem vanaf nu aan dat X_1 een geometrische verdeling heeft met verwachting 400 dagen, en dat $N(t)$ inderdaad een vernieuwingsproces is. Verder zijn de aanschafkosten van de telefoons onafhankelijke stochasten die uniform verdeeld zijn tussen 150 en 250 euro. De (vaste) abonnementskosten van de i-de telefoon zijn C_i euro per dag, waarbij de $C_i, i = 1, 2, \ldots$ onafhankelijke stochasten zijn, uniform verdeeld op $[\frac{1}{2}, 1]$.

(b) Bepaal $\lim_{t\to\infty} E[N(t)]/t$. Formuleer de stelling die u hierbij gebruikt nauwkeurig, en geef tevens een interpretatie van het antwoord.

(c) Wat zijn op lange termijn de verwachte totale kosten per dag voor Henk?

Normering:

1				2					3					4			totaal
a	b	c	d	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	
2	2	2	1	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3	2	+4=40

5 1 1 2 1 1 5

6 3