

# Afdeling der Toegepaste Wiskunde

Kenmerk : NWM/toets/BJG/T1-131203

Datum : 1 december 2013

## Numerieke Wiskunde en Modelleren (154027)

deeltoets 1 , 3 december 2013 , 14:00 – 15.30 uur.

Vermeld a.u.b. uw studentnummer op het tentamenformulier.

Motiveer al uw antwoorden zorgvuldig.

- (a) Geef de uitdrukking voor het conditiegetal van het probleem: “bereken de waarde van de functie  $f$  in een bepaald punt  $x$ ”?
- (b) Bereken het conditiegetal indien  $f$  gegeven wordt door

$$f(x) = \tan((x + 1)^2)$$

- (c) Stel dat we de waarde  $x = 0.123$  verkregen hebben uit een meting, maar dat er mogelijk een absolute fout van 0.004 op zit. Nu willen we  $f(x)$  bepalen.
  - Hoe groot is in dit geval het conditiegetal?
  - Wat kunt u uit (c1) concluderen omtrent de relatieve fout die mogelijk gemaakt wordt in het berekenen van  $f(x)$  bij dit meetpunt?
- Met behulp van een numeriek integratieproces vinden we voor een zekere integraal  $I$  de volgende benaderingen  $I(h)$  bij diverse stapgroottes  $h$ :

$h$	$I(h)$
1/2	3.26914555200204
1/4	3.26485038742132
1/8	3.26459370399133
1/16	3.26457783407070

- Bepaal de (geheeltallige) orde  $p$  van dit proces op grond van de waarden in de tabel, m.a.w. bepaal de waarde van  $p$  in de uitdrukking  $I(h) = I + ch^p + O(h^{p+1})$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .
  - Voer één extrapolatie uit om een betere benadering voor  $I$  te bepalen, inclusief foutschatting.
- We beschouwen het randwaardeprobleem:

$$y''(x) = (x^2 + y^2(x)) \tag{1}$$

met randcondities

$$y(1) = 1, \quad y(3) = 0. \tag{2}$$

We kiezen een uniform rooster op het interval  $[1, 3]$  bestaande uit  $n + 1$  punten, met onderlinge afstand  $h$ . De roosterpunten noemen we  $x_k, k = 0, \dots, n$ , met  $x_0 = 1, x_n = 3$ . De bijbehorende  $n + 1$  waarden  $y_k$  zijn benaderingen van  $y(x_k)$ .

- (a) Laat zien dat de centrale differentie

$$(\delta_2(y))_k = \frac{1}{h^2}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})$$

de tweede afgeleide  $y''(x_k)$  in het punt  $x_k$  met tweede orde nauwkeurigheid benadert.

- (b) Bepaal de differentievergelijkingen die de vergelijking (1) in  $x_1$  en  $x_{n-1}$  benaderen. Formuleer uw antwoord in termen van  $\{y_k\}$  en gebruik de randcondities in (2).
- (c) Beschrijf het lineaire stelsel vergelijkingen dat moet worden opgelost om de waarden  $\{y_k\}$  te verkrijgen.

De waarden van de opgaven: opg. 1: 1/2 punt, opg. 2: 1/2 punt, opg. 3: 1/2 punt, dus in totaal 1 1/2 punt. Deze deoltoets is met goed gevolg afgerond als tenminste 3/4 punt is behaald.

---