1. Gegeven is de functie

$$f(x) = 1 - e^{-x}\ ,\ 0 < x \leq 1.$$

Met δf geven we de absolute fout aan in f als gevolg van een absolute fout δx in x.

(a) Geef een eerste orde benadering voor δf.

(b) Bepaal het conditiegetal $c_P(x)$ voor de berekening van $f(x)$.

(c) Toon aan dat voor kleine waarden van $|\delta x|$ de relatieve fout $|\delta f/f|$ kleiner is dan de relatieve fout $|\delta x/x|$.

De benadering $\tilde{f}(x)$ van $f(x)$ ontstaat door $f(x)$ in een Taylorreeks te ontwikkelen en deze af te breken. Tevens bevat x een absolute fout δx met $|\delta x| \leq 5 \cdot 10^{-5}$.

(d) Waarom is het beter om voor (zeer) kleine waarden van x de benadering $\tilde{f}(x)$ te gebruiken (gebaseerd op "voldoende" Taylortermen) in plaats van $f(x)$ zelf?

(e) Bepaal $f(0.1)$ door berekening van $\tilde{f}(0.1)$. Zorg daarbij dat de afbreekfout ten hoogste 1/10 is van de gepropageerde fout, maar gebruik niet meer Taylortermen dan hiertoe nodig zijn.
Geef het antwoord met een absolute foutgrens.

2. (a) Voor de functie

$$f(x) = \frac{1}{A - x} \qquad (A > 0,\ A \text{ vast})$$

geldt (zie voorbeeld (3.16)):

$$f^{(n+1)}(x) \;=\; \frac{(n+1)\,!}{(A - x)^{n+2}}.$$

We willen de functie $f(x)$ benaderen met een polynoom van graad n op het interval $[0, a]$, $0 < a < A$, op basis van een Chebyshev rooster.
Bepaal een bovengrens voor de waarde van a opdat de rij van polynomen $p_n(x)$, $n \to \infty$, zeker zal convergeren naar $f(x)$.
Hint: transformeer het interval $[0, a]$ naar $[-1, 1]$ en maak f van dezelfde vorm als in voorbeeld (3.16).

(b1) Gegeven is een functie f die *symmetrisch* is (d.w.z. $f(-x) = f(x)$).
Bewijs dat de L_2-approximatie van f op het interval $[-1, 1]$ met behulp van een polynoom van een bepaalde graad n ook symmetrisch is.

(b2) Gegeven zijn de integralen (let op de integratiegrenzen!)

$$I_n = \int_0^1 x^n \cos(\pi x/2)\, dx$$

met

$$I_0 = 2/\pi\,,\ I_1 = 2/\pi - 4/\pi^2\,,\ I_2 = 2/\pi - 16/\pi^3\,,\ I_3 = 2/\pi - 48/\pi^3 + 96/\pi^4.$$

Bepaal het polynoom p_3 van graad ≤ 3, dat de functie $f(x) = \cos(\pi x/2)$ het best benadert op $[-1, 1]$ in L_2-zin.
Hint: maak gebruik van onderdeel (b1).

(b3) Bepaal de absolute fout $\|p_3 - f\|_\infty$ op $[-1, 1]$ als verder gegeven is dat de functie $p_3(x) - f(x)$ alleen lokale optima heeft op $]-1, 1[$.

3. We beschouwen het stelsel vergelijkingen $f(x) = 0$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_1(x_1,x_2) & = & 0\ , \\ f_2(x_1,x_2) & = & 0\ . \end{array}\right. \quad \text{met} \quad \left\{\begin{array}{lcl} f_1(x_1,x_2) & = & x_1^2 - x_2^2 - 1\ , \\ f_2(x_1,x_2) & = & 2x_1x_2\ . \end{array}\right. \tag{1}$$

We willen stelsel (1) oplossen door middel van het iteratieve proces $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1^{(k+1)} & = & \phi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})\ , \\ x_2^{(k+1)} & = & \phi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})\ . \end{array}\right. \quad \text{met} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \phi_1(x_1,x_2) & = & x_1 - \frac{1}{2} f_1(x_1,x_2)\ , \\ \phi_2(x_1,x_2) & = & x_2 - \frac{1}{2} f_2(x_1,x_2)\ . \end{array}\right. \tag{2}$$

(a) Toon aan dat bij convergentie de limiet $\hat{x}$ van de rij $\{x^{(k)}\}$ een nulpunt van f is.
N.B. U hoeft de convergentie niet aan te tonen.

(b1) Na k iteratiestappen is de vector $x^{(k)} = (1 + \epsilon_1, \epsilon_2)$ verkregen. Bepaal het exacte resultaat voor $x^{(k+1)}$.

(b2) Verklaar met de resultaten uit (b1) dat het iteratieproces bij voortzetting zal convergeren naar $\hat{x} = (1, 0)$, mits $|\epsilon_1|$ en $|\epsilon_2|$ klein genoeg zijn.
Is de convergentie lineair of kwadratisch?

(b3) Verifieer de resultaten uit (b2) met behulp van de matrix $[D_{\hat{x}}\phi]$.

Vervolgens bekijken we het Newton–iteratieproces.

(c1) Formuleer het Newton–proces voor het stelsel vergelijkingen gegeven door (1).

(c2) Dit Newton–proces wordt gestart met $x^{(0)} = (1, 1)$. Bepaal $x^{(1)}$.