1. We beschouwen de volgende functie:

$$f(x) \;=\; \cos(2x) \;-\; \cos(2)\,, \;\; 0 < x < \frac{\pi}{2}\,,$$

en het bijbehorende probleem P 'bereken $f(x)$'.

(a) Bereken het conditiegetal $c_P(x)$ van dit probleem P.

Op een machine met relatieve machineprecisie ϵ_C evalueren we $f(x)$ voor machinegetallen x. U mag aannemen dat de getallen $2x$ en 2, die in $f(x)$ voorkomen, ook machinegetallen zijn en dat standaardfuncties zoals $\cos(\cdot)$ ook berekend worden met eenzelfde relatieve precisie ϵ_C. Het machineresultaat voor $f(x)$ is $C[f(x)]$.

(b1) Geef een benadering in eerste orde van ϵ_C voor de relatieve afrondfoutgrens in $C[f(x)]$.

(b2) Wat gebeurt er met deze relatieve afrondfoutgrens in het geval $x \approx 1$?

Met behulp van goniometrische formules kan men aantonen dat de functie $g(x)$, gegeven door

$$g(x) \;=\; -2\,\sin(x-1)\,\sin(x+1)\,,$$

identiek gelijk is aan $f(x)$.

(c) Welke manier om de functie te berekenen heeft de voorkeur, $f(x)$ of $g(x)$? Betrek in uw motivatie de conditie van het probleem èn de afrondfout. Gedetailleerde berekeningen worden niet gevraagd.

2. We willen met behulp van de Trapeziumregel het beginwaardeprobleem

$$y'(x) = f(x,y)\,, \;\; y(0) = y_0, \tag{1}$$

oplossen om hiermee $y(1)$ te berekenen.

We definieren $y_k^{(N)}$, $k = 0, \ldots, N$, als de benadering van de exacte oplossing $y(x)$ van (1) op $x_k = k \cdot h$, $h = 1/N$, met behulp van de Trapeziumregel met N stappen.

We noteren $y_N^{(N)}$ als $\bar{y}(h,1)$, $h = 1/N$. Voor elke N kunnen we $\bar{y}(h,1)$ dus zien als benadering van de exacte oplossing $y(1)$:

$$\bar{y}(h,1) = y(1) + c \cdot h^p + o(h^p)\,, \quad c \neq 0.$$

Hierin wordt $p > 0$ de orde van convergentie genoemd.

(a) Wat kunt u zeggen over de grootheid $Q = \dfrac{\bar{y}(2h,1) - y(1)}{\bar{y}(h,1) - y(1)}$ indien $h \to 0$?

Beschouw nu het beginwaardeprobleem

$$y'(x) = -x \cdot y(x)\,, \;\; y(0) = 1, \tag{2}$$

waarbij gegeven is dat $y(1) = e^{-1/2}$.

(b) Druk $y_{k+1}^{(N)}$ uit in $y_k^{(N)}$ voor het probleem (2).
NB. Deze relatie hangt alleen af van h en k.

(c1) Laat met behulp van onderdeel (b) zien dat

$$y_1^{(1)} = \bar{y}(1,1) = 2/3\,.$$

(c2) Laat met behulp van onderdeel (b) zien dat

$$y_2^{(2)} = \bar{y}(1/2,1) = 28/45.$$

(d) Wat kunt u, op grond van de numerieke resultaten in de onderdelen (c1)-(c2) èn het analytische antwoord, zeggen over de orde van convergentie van de Trapeziumregel?

(e) Geef, met behulp van de numerieke resultaten in de onderdelen (c1)-(c2), een nauwkeurigere benadering van $y(1)$.

3. De functie $f : [1,4] \to I\!R$ is gegeven door

$$f(x) \;=\; x \;+\; \ln(x) \;-\; 4.$$

(a1) Bewijs dat f monotoon is op $[1,4]$.

(a2) Bewijs dat f precies één nulpunt heeft op $[1,4]$.

We noemen deze wortel α (≈ 3).

Ter bepaling van deze wortel beschouwen we het iteratieproces

$$x^{(k+1)} \;=\; \phi(x^{(k)})\,, \;\; k = 0,1,2,\ldots.$$

Gegeven is voorts dat ϕ een continu differentieerbare functie is.

(b1) Aan welke voorwaarde(n) moet ϕ voldoen opdat dit proces lokaal convergeert naar de wortel α?

(b2) Laat zien dat de volgende keuze van ϕ,

$$\phi(x) \;=\; \frac{1}{4}x \;-\; \frac{3}{4}\ln(x) \;+\; 3\,,$$

geschikt is om de wortel α numeriek te bepalen.

Als we de iteratiefunctie uit onderdeel (b2) gebruiken vinden we de volgende numerieke waarden, wanneer we starten met $x^{(0)} = 3$:

(c) Wat volgt uit bovenstaande tabel voor de orde van het proces? Motiveer uw antwoord.

k	$x^{(k)}$
1	2.92604078349
2	2.92627251526
3	2.92627105329
4	2.92627106250
5	2.92627106244
6	2.92627106244