UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerking proeftentamen 2 Signalen en Transformaties (201100109).

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

1.

Zij $f(t)$ de π-periodieke functie die voor $t \in [0, \pi)$ wordt gegeven door

$$f(t) = t\cos t$$

a) Toon aan dat de complexe Fouriercoëfficiënten van $f(t)$ gelijk zijn aan:

$$f_k = \frac{2ki}{1-4k^2} - \frac{2+8k^2}{\pi(1-4k^2)^2}$$

Omdat $T = \pi$ hebben we $\omega_0 = 2$. We krijgen:

$$\begin{aligned}
f_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\cos t e^{-i2kt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t\left(e^{i(1-2k)t} + e^{-i(1+2k)t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[t\left(\frac{1}{i(1-2k)}e^{i(1-2k)t} - \frac{1}{i(1+2k)}e^{-i(1+2k)t}\right)\right]_0^\pi \\
&\qquad - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{1}{i(1-2k)}e^{i(1-2k)t} - \frac{1}{i(1+2k)}e^{-i(1+2k)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{-1}{1-2k} + \frac{1}{1+2k}\right] + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{(1-2k)^2}e^{i(1-2k)t} + \frac{1}{(1+2k)^2}e^{-i(1+2k)t}\right]_0^\pi \\
&= \frac{2ki}{1-4k^2} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{(1-2k)^2} + \frac{1}{(1+2k)^2}\right] \\
&= \frac{2ki}{1-4k^2} - \frac{2}{\pi}\frac{1+4k^2}{(1-4k^2)^2}
\end{aligned}$$

en dat is gelijk aan de gegeven uitkomst.

b) Bepaal de reële Fourierreeks van $f(t)$.

We weten dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t).$$

We hebben $\omega_0 = 2$. Daarnaast geldt $2f_k = a_k - ib_k$ en dus

$$a_k = -\frac{4(1+4k^2)}{\pi(1-4k^2)^2}, \quad b_k = -\frac{4k}{1-4k^2}.$$

Hieruit volgt dat de reële Fourierreeks gelijk is aan:

$$-\frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(1+4k^2)}{\pi(1-4k^2)^2}\cos(2kt) + \frac{4k}{1-4k^2}\sin(2kt).$$

c) Is f gelijk aan de reële Fourierreeks voor alle $t \in \mathbb{R}$?

We weten dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ gelijk is aan

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

Dit is natuurlijk gelijk aan $f(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ waar de functie continu is. Maar in het punt π is de functie niet continu:

$$f(\pi-) = \lim_{t \uparrow \pi} f(t) = -\pi, \quad f(\pi+) = \lim_{t \downarrow \pi} f(t) = \lim_{t \downarrow 0} f(t) = 0.$$

Dus de reële Fourierreeks voor $t = \pi$ is gelijk aan $-\pi/2$ en niet gelijk aan $f(\pi) = f(0) = 0$.

d) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

Voor $t \in (0, \pi)$ hebben we:

$$f(t) = t \cos t$$

en dus:

$$f'(t) = \cos t - t \sin t$$

maar zoals we al zagen heeft de functie in π een sprong omhoog van $-\pi$ naar 0 en dus komt er ook nog een δ-functie in de afgeleide. Dus voor $t \in (0, \pi+)$ hebben we:

$$f'(t) = \cos t - t \sin t + \pi \delta(t - \pi)$$

en dit moet π-periodiek wordt voortgezet. In het bijzonder heeft de afgeleide dus een δ-puls in $-\pi$, 0, π, etc.

e) Bepaal het vermogen van f.

Dit kan het makkelijkste in het tijddomein:

$$P_f = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

dus

$$\begin{aligned}
P_f &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t^2 \cos^2 t \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t^2 (1 + \cos 2t) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{6}\pi^2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t^2 \cos 2t \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{6}\pi^2 + \frac{1}{4\pi} \left[t^2 \sin 2t \right]_0^\pi - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t \sin 2t \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{6}\pi^2 + \frac{1}{4\pi} [\, t \cos 2t \,]_0^\pi - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \cos 2t \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{6}\pi^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8\pi} [\, \sin 2t \,]_0^\pi \\
&= \frac{1}{6}\pi^2 + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

2.

Voor een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = \frac{2\sin t}{t+\pi}$$

a) Laat zien dat de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ van het systeem gegeven wordt door

$$2\pi e^{i\omega\pi}\left[\mathbb{1}(\omega-1) - \mathbb{1}(\omega+1)\right]$$

We hebben

$$\begin{aligned}
\mathrm{rect}_2(t) &\longleftrightarrow \frac{2\sin\omega}{\omega} \\
\frac{2\sin t}{t} &\longleftrightarrow 2\pi\,\mathrm{rect}_2(-\omega) \\
\frac{2\sin t}{t} &\longleftrightarrow 2\pi\,\mathrm{rect}_2(\omega)
\end{aligned}$$

volgens de reciprociteitsregel en de tabel. Vervolgens passen we een tijdsverschuiving toe:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(t+\pi)}{t+\pi} &\longleftrightarrow \pi e^{i\omega\pi}\,\mathrm{rect}_2(\omega) \\
-\frac{\sin(t)}{t+\pi} &\longleftrightarrow \pi e^{i\omega\pi}\,\mathrm{rect}_2(\omega) \\
\frac{\sin(t)}{t+\pi} &\longleftrightarrow \pi e^{i\omega\pi}\left[\mathbb{1}(\omega-1) - \mathbb{1}(\omega+1)\right]
\end{aligned}$$

waar we gebruiken dat:

$$\sin(t+\pi) = -\sin(t), \qquad \mathrm{rect}_2(\omega) = \mathbb{1}(\omega+1) - \mathbb{1}(\omega-1)$$

Dit levert dus de frequentieresponsie op zoals gegeven in de opgave.

Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = 1 - \cos(\tfrac{1}{2}t) - \sin(4t) + 3\cos(6t)$$

toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

$u(t)$ is een periodiek signaal. Als $u(t)$ een periodiek signaal is met Fourierreeks:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{ik\omega_0 t}$$

dan hebben we:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k\omega_0) u_k e^{ik\omega_0 t}$$

In ons geval,

$$u(t) = 1 - \tfrac{1}{2}\left(e^{it/2} + e^{-it/2}\right) - \tfrac{1}{2i}\left(e^{4it} - e^{-4it}\right) + \tfrac{3}{2}\left(e^{6it} + e^{-6it}\right)$$

en dus:

$$\begin{aligned} y(t) = \hat{h}(0) - \tfrac{1}{2}\left(\hat{h}(\tfrac{1}{2})e^{it/2} + \hat{h}(-\tfrac{1}{2})e^{-it/2}\right) - \tfrac{1}{2i}\left(\hat{h}(4)e^{4it} - \hat{h}(-4)e^{-4it}\right) \\ + \tfrac{3}{2}\left(\hat{h}(6)e^{6it} + \hat{h}(-6)e^{-6it}\right) \end{aligned}$$

We hebben:

$$\begin{array}{ll} \hat{h}(6) = 0 & \hat{h}(-6) = 0 \\ \hat{h}(4) = 0 & \hat{h}(-4) = 0 \\ \hat{h}(\tfrac{1}{2}) = -2\pi i & \hat{h}(-\tfrac{1}{2}) = 2\pi i \\ \hat{h}(0) = -2\pi & \end{array}$$

Hiermee vinden we:

$$\begin{aligned} y(t) &= -2\pi + \tfrac{2\pi i}{2}\left(e^{it/2} - e^{-it/2}\right) \\ &= -2\pi - 2\pi \sin(\tfrac{1}{2}t) \end{aligned}$$

en dit is duidelijk een reëel signaal.

3.

Bepaal de convolutie van $f(t) = e^t\,\mathbb{1}(1-t)$ en $g(t) = e^{-2t}\,\mathbb{1}(t+2)$ op twee verschillende manieren.

Omdat niet alle signalen causaal zijn, moeten we Fouriertransformatie gebruiken in plaats van Laplacetransformatie.

We hebben:

$$\begin{aligned} e^{-t}\,\mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{1+i\omega} \\ e^{t}\,\mathbb{1}(-t) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-i\omega} \\ e^{t-1}\,\mathbb{1}(1-t) &\longleftrightarrow \frac{e^{-i\omega}}{1-i\omega} \\ e^{t}\,\mathbb{1}(1-t) &\longleftrightarrow \frac{e^{1-i\omega}}{1-i\omega} \end{aligned}$$

waarbij we gebruik maken van de tabel en de regels voor lineariteit, schaling en verschuiving. De Fouriergetransformeerde van $f(t)$ is dus gelijk aan:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{e^{1-i\omega}}{1-i\omega}$$

We hebben:

$$\begin{aligned} e^{-2t}\,\mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2+i\omega} \\ e^{-2t-4}\,\mathbb{1}(t+2) &\longleftrightarrow \frac{e^{2i\omega}}{2+i\omega} \\ e^{-2t}\,\mathbb{1}(t+2) &\longleftrightarrow \frac{e^{4+2i\omega}}{2+i\omega} \end{aligned}$$

volgens de tabel en de regels voor lineariteit en tijdverschuiving. De Fouriergetransformeerde van $g(t)$ is dus gelijk aan:

$$\hat{g}(\omega) = e^{4+2i\omega} \frac{1}{2+i\omega}$$

Als we deze twee stappen combineren zien we dat de Fouriergetransformeerde van $(f \star g)(t)$ gelijk is aan:

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = e^{5+i\omega} \frac{1}{1-i\omega} \frac{1}{2+i\omega}$$

We hebben:

$$\frac{1}{(1-s)(2+s)} = \frac{1}{3(1-s)} + \frac{1}{3(2+s)}$$

en dus

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = e^{5+i\omega} \left[\frac{1}{3(1-i\omega)} + \frac{1}{3(2+i\omega)} \right]$$

We hebben:

$$\begin{aligned} e^{-2t}\, \mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2+i\omega} \\ \tfrac{1}{3} e^{5-2t}\, \mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{e^5}{3(2+i\omega)} \\ \tfrac{1}{3} e^{3-2t}\, \mathbb{1}(t+1) &\longleftrightarrow \frac{e^{5+i\omega}}{3(2+i\omega)} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} e^{-t}\, \mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{1+i\omega} \\ e^{t}\, \mathbb{1}(-t) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-i\omega} \\ \tfrac{1}{3} e^{5+t}\, \mathbb{1}(-t) &\longleftrightarrow \frac{e^5}{3(1-i\omega)} \\ \tfrac{1}{3} e^{6+t}\, \mathbb{1}(-t-1) &\longleftrightarrow \frac{e^{5+i\omega}}{3(1-i\omega)} \end{aligned}$$

De convolutie is dus gelijk aan:

$$(f \star g)(t) = \tfrac{1}{3} e^{3-2t}\, \mathbb{1}(t+1) + \tfrac{1}{3} e^{6+t}\, \mathbb{1}(-t-1)$$

We kunnen dit ook rechtstreeks via de definitie berekenen:

$$\begin{aligned} (f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\, \mathbb{1}(1-\tau) e^{-2t+2\tau}\, \mathbb{1}(t-\tau+2)\, \mathrm{d}\tau \\ &= e^{-2t} \int_{-\infty}^{1} e^{3\tau}\, \mathbb{1}(t-\tau+2)\, \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Voor $t + 1 > 0$ hebben we $t - \tau + 2 > 0$ (omdat $\tau < 1$) en dus:

$$(f \star g)(t) = e^{-2t} \int_{-\infty}^{1} e^{3\tau}\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \tfrac{1}{3} e^{-2t} e^{3}$$
$$= \tfrac{1}{3} e^{3-2t}$$

Aan de andere kant, voor $t + 1 < 0$ hebben voor τ zodanig dat $t - \tau + 2 > 0$ dat $\tau < t + 2 < 1$ en dus krijgen we:

$$(f \star g)(t) = e^{-2t} \int_{-\infty}^{t+2} e^{3\tau}\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \tfrac{1}{3} e^{-2t} e^{3t+6}$$
$$= \tfrac{1}{3} e^{6+t}$$

Als we deze twee gevallen samenvoegen krijgen we:

$$(f \star g)(t) = \tfrac{1}{3} e^{3-2t}\,\mathbb{1}(t+1) + \tfrac{1}{3} e^{6+t}\,\mathbb{1}(-t-1)$$

Dat laatste laat zien dat er hetzelfde uit komt als via de Fouriertransformatie.

4.

> Gegeven is de ruimte $\tilde{\ell}_2$ van reëelwaardige rijtjes
>
> $$v = (v_1, v_2, v_3, \ldots)$$
>
> waarvoor:
>
> $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} v_i^2 < \infty$$
>
> a) We definiëren:
>
> $$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} v_i w_i$$
>
> Laat zien dat dit een inproduct is op deze ruimte.

We hebben:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} x_i y_i = \langle y, x \rangle$$

Bovendien:

$$\langle \alpha x + z, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} (\alpha x_i + z_i) y_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \left(\alpha x_i y_i + z_i y_i\right) = \alpha \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$$

Tot slot:

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} x_i^2 \geq 0$$

en

$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} x_i^2 = 0$$

impliceert $x = 0$. Bovenstaande eigenschappen garanderen dat we te maken hebben met een inproduct.

b) Gegeven is een rij in $\tilde{\ell}_2$:

$$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, x_{k,3}, \ldots)$$

met $x_{k,i} = 1$ voor $i \le k$ en $x_{k,i} = 0$ voor $i > k$. Toon aan dat dit een Cauchy rijtje is.

We hebben voor $k > j$:

$$\|x_k - x_j\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \left(x_{k,i} - x_{j,i}\right)^2 = \sum_{i=j+1}^{k} \frac{1}{i^2}$$

Omdat

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

een convergente reeks is weten we dat voor elke $\varepsilon > 0$ er een J bestaat zodanig dat:

$$\sum_{i=J}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \varepsilon$$

maar dat betekent dat voor $j, k > J$ we hebben dat:

$$\|x_k - x_j\|^2 < \varepsilon$$

Dit impliceert dat we te maken hebben met een Cauchy reeks.

5.

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + 2y(t) = u^{(1)}(t) + 2u(t). \tag{1}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

We hebben omdat alle begincondities nul zijn

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + 2Y(s) = sU(s) + 2U(s)$$

en dus:

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 2} U(s) \tag{2}$$

We vinden de impulsresponsie door de inverse Laplace transformatie los te laten op de overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

We krijgen dan dat de impulsresponsie gelijk is aan:

$$h(t) = e^{-t}\,[\cos(t) + \sin(t)]\,\mathbb{1}(t)$$

b) Bepaal de stapresponsie van (1).

We hebben voor $t > 0$:

$$g(t) = \int_{0-}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{0-}^{t} e^{-\tau}\,[\cos(\tau) + \sin(\tau)]\,\mathrm{d}\tau$$

maar dit is niet een echt leuke integraal. Een alternatief is (2) te gebruiken en dit levert op:

$$G(s) = \frac{s+2}{s(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)^2+1} + \frac{C(s+1)}{(s+1)^2+1}$$

en dit levert op $A = 1$, $B = 0$ en $C = -1$. We krijgen dus:

$$g(t) = \left[1 - e^{-t}\cos(t)\right]\mathbb{1}(t)$$

c) Als ingang kiezen we $u(t) = e^t$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 2$ en $y'(0^-) = 3$.

Als de begincondities niet nul zijn krijgen we:

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &\longleftrightarrow sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 2 \\ y^{(2)}(t) &\longleftrightarrow s(sY(s) - 2) - y'(0^-) = s^2Y(s) - 2s - 3 \end{aligned}$$

We hebben:

$$U(s) = \frac{1}{s-1}$$

en

$$u^{(1)}(t) \longleftrightarrow sU(s) - u(0^-) = \frac{s}{s-1} - 1 = \frac{1}{s-1}$$

wat natuurlijk logisch is want $u^{(1)}(t) = u(t)$. We krijgen:

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) - 2s - 7 = \frac{3}{s-1}$$

en dus

$$(s^2 + s - 2)Y(s) = 2s + 7 + \frac{3}{s-1}$$

Dus:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(2s+7)(s-1)+3}{(s-1)(s^2+2s+2)} = \frac{2s^2+5s-4}{(s-1)(s^2+2s+2)} \\ &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s+1)^2+1} + \frac{C(s+1)}{(s+1)^2+1} \end{aligned}$$

Om A, B, C te bepalen brengen we alles onder één noemer en we krijgen:

$$2s^2 + 5s - 4 = A(s^2 + 2s + 2) + B(s - 1) + C(s - 1)(s + 1)$$

en we vinden

$$A = \tfrac{3}{5}, \quad B = \tfrac{19}{5}, \quad C = \tfrac{7}{5},$$

en dat levert op::

$$y(t) = \left[\tfrac{3}{5}e^{t} + \tfrac{19}{5}e^{-t}\sin(t) + \tfrac{7}{5}e^{-t}\cos(t)\right]\mathbb{1}(t).$$