Vak : **Signalen en Transformaties**
Vakcode : 156081

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.

1. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + y(t) = u^{(2)}(t) \tag{1}$$

   (a) Bepaal de homogene oplossing van deze differentiaalvergelijking.

   (b) Gegeven is dat $u(t) = e^{2t}, t \in \mathbb{R}$. Bepaal de algemene oplossing van (1).

   (c) Bepaal de implusresponsie van (1).

2. (a) Bepaal voor de volgende twee functies $f(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$, $g(t) = e^{t}\,\mathbb{1}(-t)$ het convolutie product op twee (verschillende) manieren.

   (b) Toon aan dat de Fouriergetransformeerde van $g(t) = f(t)\cos(\omega_0 t)$ gelijk is aan $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2}\hat{f}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\hat{f}(\omega + \omega_0)$. Hierbij is $\hat{f}(\omega)$ de Fouriergetransformeerde van $f(t)$.

3. Gegeven is het periodieke signaal

$$f(t) = |\sin(t)| \tag{2}$$

   (a) Teken f, en bepaal de periode van f.

   (b) Bepaal de Fouriercoëficiënten van f.

   (c) Wat is de Fourierreeks van f?

   (d) Gebruik onderdeel (b) om de uitkomst van de volgende reeks te bepalen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

   Gegeven is nu de differentiaalvergelijking

$$y^{(1)}(t) + 10y(t) = u(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   (e) Als de ingang $u(t)$ gekozen wordt als $f(t)$ in (2), bepaal dan de Fouriercoëffїenten van $y(t)$.

Z.O.Z.

4. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 2y(t) = u(t), \qquad y(0^-) = 1,\ y^{(1)}(0^-) = 3, \tag{3}$$

waarbij $u(t) = 12$ voor $t > 1$ en nul elders.

(a) Zij a een positieve constante. Toon aan dat de Laplacegetransformeerde van

$$g(t) = f(t-a)\,\mathbb{1}(t-a)$$

gegeven wordt door $e^{-as}F(s)$, waarbij $F(s)$ de Laplacegetransformeerde is van $f(t)$.

(b) Los de differentiaalvergelijking (3) op voor $t \geq 0$.

Normering:

1	a	:	6	2	a	:	9	3	a	:	5	4	a	:	8
	b	:	8		b	:	9		b	:	9		b	:	10
	c	:	8						c	:	4				
									d	:	7				
									e	:	7				

Totaal: 90 + 10 = 100 punten

Laplace getransformeerden:

$f(t),\, t \geq 0$	$F(s)$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{bt}\sin(at)$	$\dfrac{a}{(s-b)^2+a^2}$
$e^{bt}\cos(at)$	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$
$\delta(t)$	1

Fourier getransformeerden:

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$	Voorwaarde
$e^{-at}\,\mathbb{1}(t)$	$\dfrac{1}{i\omega+a}$	$\mathrm{Re}(a) > 0$
$t^n e^{-at}\,\mathbb{1}(t)$	$\dfrac{n!}{(i\omega+a)^{n+1}}$	Re $(a) > 0$
$-e^{at}\,\mathbb{1}(-t)$	$\dfrac{1}{(i\omega-a)}$	Re $(a) > 0$
$-t^n e^{at}\,\mathbb{1}(-t)$	$\dfrac{n!}{(i\omega-a)^{n+1}}$	Re $(a) > 0$
$\mathrm{rect}_a(t)$	$a\,\mathrm{sinc}(a\omega/2)$	$a > 0$
$\delta(t)$	1	