UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerking tentamen Signalen en Transformaties (156081) op maandag 21 januari 2008, 13.30 – 16.30 uur

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

1.

Zij $f(t)$ de 2π-periodieke functie die op $[-\pi, \pi)$ gegeven wordt door

$$f(t) = \operatorname{sgn}(t)\sin(t)$$

met

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

a) Toon aan dat deze functie ook π-periodiek is.

We hebben voor de sinus:

$$\sin(\pi + t) = -\sin(t)$$

en voor $t \in [-\pi, 0]$ geldt:

$$\operatorname{sgn}(t) = -1, \quad \operatorname{sgn}(t+\pi) = 1$$

maar dan geldt voor $t \in [-\pi, 0]$ dat:

$$\operatorname{sgn}(t)\sin(\pi + t) = \operatorname{sgn}(t+\pi)\sin(t+\pi)$$

Het stuk op $[-\pi, 0]$ herhaalt zich dus op $[0, \pi]$ en omdat zich dat interval $[-\pi, \pi]$ daarna steeds herhaald wordt zien we dus dat de functie π periodiek is.

b) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

Deze functie heeft een aantal mogelijke discontinuïteiten. In 0 door de sprong in de sgn functie en in $-\pi$ (net als in π) door de periodieke voortzetting. Maar als je die punten nader bekijkt zie je geen sprong. In 0 levert de sprong in de sgn functie geen discontinuïteit omdat de sinus daar 0 is. Ook zien we dat in $-\pi$ en π de functiewaarde in beide gevallen nul is dus daar ontstaat ook geen sprong.

Omdat de functie continu is kunnen we puntsgewijs differentiëren en krijgen we geen δ-functies door sprongen in de functie. We krijgen op $[0, \pi]$ dat $f(t) = \sin(t)$ en de afgeleide is dus gelijk aan:

$$f'(t) = \cos(t)$$

en dit moeten we dan π-periodiek voortzetten. Merk op dat de afgeleide dus niet overal gelijk is aan $\cos(t)$. Op het interval $[-\pi, 0]$ is de afgeleide bijvoorbeeld gelijk aan $-\cos(t)$.

c) Bereken de reële Fourierreeks van $f(t)$.

We weten dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t).$$

We weten dat $\omega_0 = 2$ en $2f_k = a_k - ib_k$ met

$$f_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)e^{-ik\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

Deze integraal kunnen we het makkelijkste uitrekenen door $\sin(t)$ uit te drukken in complexe e-machten:

$$f_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}e^{i2kt}\,\mathrm{d}t$$

We krijgen:

$$\begin{aligned}
f_k &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi} e^{-i(2k-1)t} - e^{-i(2k+1)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{-i(2k-1)}e^{-i(2k-1)t} - \frac{1}{-i(2k+1)}e^{-i(2k+1)t}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2k-1}\left(e^{-i(2k-1)\pi}-1\right) - \frac{1}{2k+1}\left(e^{-i(2k+1)\pi}-1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right]\left(e^{-i(2k+1)\pi}-1\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{2}{4k^2-1}\left((-1)^{2k+1}-1\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{-4}{4k^2-1} \\
&= \frac{2}{\pi(1-4k^2)}
\end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$a_k = \frac{4}{\pi(1-4k^2)}, \qquad b_k = 0$$

en de reële Fourierreeks van $f(t)$ is gelijk aan:

$$\tfrac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos(2kt).$$

d) We kunnen de reële Fourierreeks van $f(t)$ berekenen als we uitgaan van een 2π periodieke functie maar ook als we uitgaan van een π-periodieke functie. Kunt u beargumenteren of dit verschillende of gelijke antwoorden op zal leveren?

De Fourierreeks is uniek. Dus in beide gevallen komen we uit op

$$\tfrac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos(2kt).$$

Als we doen alsof de functie π periodiek is krijgen we een Fourierreeks:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2kt).$$

Echter als we doen alsof de functie 2π periodiek is krijgen we een Fourierreeks:

$$\tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos(kt).$$

maar het blijkt dan dat de oneven termen gelijk zijn aan 0 terwijl de even termen gelijk zijn a_k, d.w.z.

$$\tilde{a}_k = \begin{cases} a_m & k = 2m \\ 0 & k = 2m+1 \end{cases}$$

waardoor er in beide gevallen toch hetzelfde uitkomt.

e) Bepaal het vermogen van f.

Dit kan het makkelijkste in het tijddomein:

$$P_f = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

dus

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin(t)|^2 \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2t) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}\sin(2t) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \tfrac{1}{2}\pi \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.

Voor een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = e^{(3i+1)t}\, \mathbb{1}(-t) + e^{(2i-4)t}\, \mathbb{1}(t) + \delta(t).$$

a) Bepaal de frequentieresponsie van het systeem.

We moeten de impulsresponsie Fourier transformeren. Dat levert dan de frequentieresponsie op. We weten:

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

Bovendien

$$\begin{aligned} e^{-4t}\, \mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{4 + i\omega} \\ e^{2it} e^{-4t}\, \mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{4 + i(\omega - 2)} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} e^{-t}\,\mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{1+i\omega} \\ e^{t}\,\mathbb{1}(-t) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-i\omega} \\ e^{3it}e^{t}\,\mathbb{1}(-t) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-i(\omega-3)} \end{aligned}$$

De frequentieresponsie is dus gelijk aan:

$$H(\omega) = 1 + \frac{1}{4-2i+i\omega} + \frac{1}{1+3i-i\omega}$$

Zij u het 1-periodieke signaal met het volgende lijnenspectrum (ook wel Fouriercoefficiënten genoemd):

$$u_k = \begin{cases} 1 & |k| \le 1 \\ 0 & |k| \ge 2 \end{cases}$$

b) Bereken de responsie $y(t)$.

We hebben:

$$u(t) = e^{-i\omega_0 t} + 1 + e^{i\omega_0 t}$$

en dan geldt:

$$y(t) = H(-\omega_0)e^{-i\omega_0 t} + H(0) + H(\omega_0)e^{i\omega_0 t}$$

We weten dat u een 1-periodiek signaal is en dus geldt $\omega_0 = 2\pi$. We krijgen dus:

$$y(t) = H(-2\pi)e^{-i2\pi t} + H(0) + H(2\pi)e^{i2\pi t}$$

Met

$$\begin{aligned} H(2\pi) &= 1 + \frac{1}{4-2i+2\pi i} + \frac{1}{1+3i-2\pi i} \\ H(0) &= 1 + \frac{1}{4-2i} + \frac{1}{1+3i} \\ H(-2\pi) &= 1 + \frac{1}{4-2i-2\pi i} + \frac{1}{1+3i+2\pi i} \end{aligned}$$

De uitdrukking valt verder niet echt meer te vereenvoudigen.

c) Bereken de responsie $\tilde{y}(t)$ voor de ingang $\tilde{u}(t) = u(t-\frac{1}{2})$.

We hebben $\tilde{y}(t) = y(t-\frac{1}{2})$ met y zoals berekend in het vorige onderdeel. Dit kun je als volgt zien. We hebben:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= e^{-i2\pi(t-1/2)} + 1 + e^{i2\pi(t-1/2)} \\ &= e^{i\pi}e^{-i2\pi t} + 1 + e^{-i\pi}e^{i2\pi t} \\ &= -e^{-i2\pi t} + 1 - e^{i2\pi t} \end{aligned}$$

en dus:

$$\tilde{y}(t) = -H(-2\pi)e^{-i2\pi t} + H(0) - H(2\pi)e^{i2\pi t}$$

en je kunt eenvoudig controleren dat $\tilde{y}(t) = y(t-\frac{1}{2})$. De termen $H(-2\pi)$, $H(0)$, $H(2\pi)$ zijn hetzelfde als in het vorige onderdeel.

3.

$\boxed{\text{Bepaal de convolutie van } f(t) = te^{-t+1}\,\mathbb{1}(t) \text{ en } g(t) = \operatorname{sgn}(2t+1) \text{ op twee verschillende manieren.}}$

We hebben:

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

en we krijgen:

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)e^{-t+\tau+1}\,\mathbb{1}(t-\tau)\operatorname{sgn}(2\tau+1)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} (t-\tau)e^{-t+\tau+1}\operatorname{sgn}(2\tau+1)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

De sgn functie springt voor $\tau = -\frac{1}{2}$. We maken een onderscheid in de situatie dat $t > -\frac{1}{2}$ en de situatie dat $t < -\frac{1}{2}$. In het laatste geval geldt altijd dat $\tau < -\frac{1}{2}$ en is $\operatorname{sgn}(2\tau+1)$ functie altijd gelijk aan -1 en krijgen we:

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{t} (t-\tau)e^{-t+\tau+1}\operatorname{sgn}(2\tau+1)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} -(t-\tau)e^{-t+\tau+1}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \Big[-(t-\tau)e^{-t+\tau+1}\Big]_{\tau=-\infty}^{t} - \int_{-\infty}^{t} e^{-t+\tau+1}\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_{-\infty}^{t} e^{-t+\tau+1}\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\Big[e^{-t+\tau+1}\Big]_{\tau=-\infty}^{t} \\ &= -e\end{aligned}$$

Voor $t > -\frac{1}{2}$ splitsen we de integraal in een stuk waar de functie $\operatorname{sgn}(2\tau+1)$ gelijk is aan -1 en een stuk waar de functie gelijk is aan 1. We krijgen:

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{t} (t-\tau)e^{-t+\tau+1}\operatorname{sgn}(2\tau+1)\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_{-\infty}^{-1/2} (t-\tau)e^{-t+\tau+1}\,\mathrm{d}\tau + \int_{-1/2}^{t} (t-\tau)e^{-t+\tau+1}\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\Big[(t-\tau)e^{-t+\tau+1}\Big]_{\tau=-\infty}^{-1/2} + \int_{-\infty}^{-1/2} -e^{-t+\tau+1}\,\mathrm{d}\tau \\ &\qquad + \Big[(t-\tau)e^{-t+\tau+1}\Big]_{\tau=-1/2}^{t} - \int_{-1/2}^{t} -e^{-t+\tau+1}\,\mathrm{d}\tau \\ &= -(t+\tfrac{1}{2})e^{-t+1/2} + \int_{-\infty}^{-1/2} -e^{-t+\tau+1}\,\mathrm{d}\tau \\ &\qquad - (t+\tfrac{1}{2})e^{-t+1/2} + \int_{-1/2}^{t} e^{-t+\tau+1}\,\mathrm{d}\tau \\ &= -(2t+1)e^{-t+1/2} - \Big[e^{-t+\tau+1}\Big]_{\tau=-\infty}^{-1/2} + \Big[e^{-t+\tau+1}\Big]_{\tau=-1/2}^{t} \\ &= -(2t+1)e^{-t+1/2} - e^{-t+1/2} + e - e^{-t+1/2} \\ &= -(2t+3)e^{-t+1/2} + e\end{aligned}$$

We vinden dus:

$$(f \star g)(t) = \begin{cases} -e & t < -\frac{1}{2} \\ -(2t+3)e^{-t+1/2} + e & t > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

of, equivalent,

$$(f \star g)(t) = -(2t+3)e^{-t+1/2}\,\mathbb{1}(2t+1) + e\,\mathrm{sgn}(2t+1)$$

Aan de andere kant, de Fouriergetransformeerde van $f(t)$ is gelijk aan:

$$F(\omega) = \frac{e}{(1+i\omega)^2}$$

Voor g is het handig om te beseffen dat:

$$g(t) = \mathrm{sgn}(t + \tfrac{1}{2})$$

en dan volgt de Fouriergetransformeerde van $g(t)$ direct:

$$G(\omega) = e^{i\omega/2}\frac{2}{i\omega}$$

maar dan is de Fouriergetransformeerde van $(f \star g)(t)$ gelijk aan:

$$F(\omega)G(\omega) = e^{1+i\omega/2}\frac{2}{i\omega(1+i\omega)^2}$$

Voor de inverse Fouriertransformatie gaan we eerst breuksplitsen

$$\frac{1}{s(1+s)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+s} + \frac{C}{(1+s)^2}$$

We krijgen

$$A(1+s)^2 + Bs(1+s) + Cs = 1$$

en dus:

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ 2A + B + C &= 0 \\ A + B &= 0 \end{aligned}$$

Dat wil zeggen $A = 1$, $B = -1$ en $C = -1$. We hebben dus

$$F(\omega)G(\omega) = 2e^{1+i\omega/2}\left(\frac{1}{i\omega} - \frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{(1+i\omega)^2}\right)$$

Nu gaan we de inverse Fouriertransformatie toepassen:

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t) - (1+t)e^{-t}\,\mathbb{1}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{i\omega} - \frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{(1+i\omega)^2}$$

Nu gebruiken we een tijdsverschuiving:

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t+\tfrac{1}{2}) - (t+\tfrac{3}{2})e^{-t-1/2}\,\mathbb{1}(t+\tfrac{1}{2}) \longleftrightarrow e^{i\omega/2}\left(\frac{1}{i\omega} - \frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{(1+i\omega)^2}\right)$$

en een schaling:

$$e\,\mathrm{sgn}(t+\tfrac{1}{2}) - (2t+3)e^{-t+1/2}\,\mathbb{1}(t+\tfrac{1}{2}) \longleftrightarrow e^{1+i\omega/2}\left(\frac{1}{i\omega} - \frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{(1+i\omega)^2}\right)$$

en dus is de convolutie $(f * g)(t)$ gelijk aan

$$e\,\mathrm{sgn}(2t+1) - (2t+3)e^{-t+1/2}\,\mathbb{1}(2t+1)$$

4.

Vier studenten zijn aan het studeren. Volgens Harry kun je aan de gegeneraliseerde afgeleide van een functie zien of de functie zelf continue is. Viktor is het hiermee eens omdat de gegeneraliseerde afgeleide van een continue functie zelf weer continu is. Fleur vindt dit onzin omdat een functie continu moet zijn wil de gegeneraliseerde afgeleide bestaan. Cedric houdt zich altijd afzijdig maar wil dit keer toch opmerken dat ze allemaal ongelijk hebben.
Geef voor elk van de studenten aan of ze gelijk dan wel ongelijk hebben en waarom.

Harry heeft natuurlijk gelijk. Want als de afgeleide δ-pulsen bevat dan is de functie niet continu en als de afgeleide geen δ-pulsen bevat dan is de functie continu .

Viktor heeft natuurlijk niet gelijk. Een simpele continue functie als $|t|$ heeft als gegeneraliseerde afgeleide $\operatorname{sgn}(t)$ en die is niet continu.

Fleur heeft ook ongelijk. Per slot van rekening heeft de niet continue functie $\mathbb{1}(t)$ een goed gedefinieerde gegeneraliseerde afgeleide $\delta(t)$.

Hieruit volgt dat Cedric ook niet gelijk heeft want Harry had gelijk.

5.

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + y(t) = u^{(1)}(t) + u(t). \tag{1}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

We hebben omdat alle begincondities nul zijn

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = sU(s) + U(s)$$

en dus:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1}U(s) = \frac{1}{s+1}U(s)$$

We vinden de impulsresponsie door de inverse Laplace transformatie los te laten op de overdrachtsfunctie

$$\frac{1}{s+1}$$

en dan krijgen we de impulsresponsie:

$$h(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$$

b) Als ingang kiezen we $u(t) = \delta(t)$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 2$ en $y'(0^-) = 1$.

Als de begincondities niet nul zijn krijgen we:

$$y'(t) \longleftrightarrow sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 2$$

en

$$y''(t) \longleftrightarrow s(sY(s) - 2) - y'(0^-) = s^2Y(s) - 2s - 1$$

We krijgen:

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 2\,(sY(s) - 2) + Y(s) = (s+1)U(s)$$

en dus

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = 2s + 5 + (s+1)U(s)$$

Omdat $u(t) = \delta(t)$ krijgen we $U(s) = 1$ en

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = 2s + 5 + s + 1 = 3(s+2)$$

en dus

$$Y(s) = \frac{3(s+2)}{(s+1)^2} = \frac{3}{s+1} + \frac{3}{(s+1)^2}$$

Dat levert op $t > 0$:

$$y(t) = 3e^{-t} + 3te^{-t}$$

c) Bepaal de stapresponsie van (1). Dat wil zeggen, bepaal de oplossing van (1) met $u(t) = \mathbb{1}(t)$ en $y(0^-) = 0$ en $y'(0^-) = 0$.

Voor begincondities nul hebben we:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}U(s)$$

en met $U(s) = \frac{1}{s}$ krijgen we:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

en dus

$$y(t) = 1 - e^{-t}$$

voor $t > 0$.