UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen Signalen en Transformaties (156081) op maandag 26 oktober 2009, 8.45 – 11.45 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

---

1. Zij $f(t)$ de functie die wordt gegeven door

$$f(t) = \operatorname{sgn}(\sin(t) + \cos(t))$$

   a) Schets de functie $g(t) = \sin(t) + \cos(t)$.

   b) Toon aan dat de complexe Fourierreeks van $f(t)$ gelijk is aan:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)\pi i} e^{(2m+1)i\pi/4} e^{i(2m+1)t}$$

   c) Bereken de reële Fourierreeks van $f(t)$.

   d) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

   e) Bepaal het vermogen van f.

2. Voor een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$$

   a) Bepaal de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ van het systeem.

   Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = \sin(t) - \sin(3t)$$

   toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

   b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

3. Bepaal de convolutie van $f(t) = e^t \, \mathbb{1}(-t)$ en $g(t) = e^{-t} \, \mathbb{1}(t+1)$ op twee verschillende manieren.

z.o.z.

---

4. Drie studenten zijn het college aan het nabespreken. Volgens Hermione geldt dat de Fouriercoëfficiënten g_k van $f'(t)$ bepaald kunnen worden uit de Fouriercoëfficiënten f_k van een periodieke functie $f(t)$ via:

   $$g_k = ik\omega_0 f_k$$

   Volgens Fleur geldt dat dan ook de Fouriercoëfficiënten van

   $$h(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

   bepaald kunnen worden via:

   $$g_k = \frac{f_k}{ik\omega_0}$$

   Ron vindt dit onzin want als die formules waar zijn dan hadden ze wel in het diktaat gestaan. Volgens Harry is er met die laatste formule iets vreemds aan de hand want g_0 is niet goed gedefinieerd dus je zult wel aan moeten nemen dat $f_0 = 0$ maar met die extra voorwaarde denkt hij dat die formule voor de primitieve wel waar zal zijn.

   Geef voor elk van de studenten aan of ze gelijk dan wel ongelijk hebben en waarom.

5. Gegeven is de differentiaalvergelijking

   $$y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) = u^{(1)}(t) - u(t). \tag{1}$$

   a) Bepaal de impulsresponsie van (1).
   b) Bepaal de stapresponsie van (1).
   c) Als ingang kiezen we $u(t) = e^{-2t}\,\mathbb{1}(t)$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 1$ en $y'(0^-) = -1$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	12 punten	Vraagstuk	3.	8 punten	Vraagstuk	5.	12 punten
Vraagstuk	2.	12 punten	Vraagstuk	4.	10 punten			

Het cijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 6 punten op te tellen en dan door 6 te delen.

Formuleblad Signalen en Transformaties (156081)

Integraaltransformaties

Tabel Fourier transformaties

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt} \qquad \boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega}$$

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
$\mathrm{rect}_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } \lvert t\rvert < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > \frac{a}{2} \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{2\sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{\omega}$
$\mathrm{trian}_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t\rvert}{a} & \text{voor } \lvert t\rvert < a \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > a \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{4\sin^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert},\ \ \mathrm{Re}\, a > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\,\mathbb{1}(t),\ \ \mathrm{Re}\, a > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(a+i\omega)^{n+1}}$
$e^{-at^2},\ \ a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\left(\frac{-\omega^2}{4a}\right)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t > 0 \\ 0 & \text{voor } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$

Tabel Laplace transformaties

$$\boxed{F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt}$$ éénzijdige Laplace transformatie

$f(t)$	$F(s)$	conv. abscis
$e^{at}\,\mathbb{1}(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re} a$
$\frac{t^n}{n!}e^{at}\,\mathbb{1}(t),\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} a$
$\cos(bt)\,\mathbb{1}(t),\ \ b \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	0
$\sin(bt)\,\mathbb{1}(t),\ \ b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	0
$\delta(t)$	1	$-\infty$

Rekenregels

Fourierreeksen (periode T, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$)

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow f_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ik\omega_0 t}\,dt \\
f(t-\tau) &\longleftrightarrow e^{-ik\omega_0\tau} f_k \\
e^{in\omega_0 t} f(t) &\longleftrightarrow f_{k-n} \qquad (n \text{ geheel})
\end{aligned}$$

Fourier transformatie

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow \hat{f}(\omega) \\
f(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega) \qquad (t_0 \in \mathbb{R}) \\
e^{i\omega_0 t} f(t) &\longleftrightarrow \hat{f}(\omega - \omega_0) \qquad (\omega_0 \in \mathbb{R}) \\
f'(t) &\longleftrightarrow i\omega\hat{f}(\omega) \\
\hat{f}(t) &\longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)
\end{aligned}$$

Laplace transformatie

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow F(s) \\
f(t-t_0)\,\mathbb{1}(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-st_0}F(s) \qquad (t_0 \geq 0) \\
e^{s_0 t} f(t) &\longleftrightarrow F(s - s_0) \qquad (s_0 \in \mathbb{C}) \\
f'(t) &\longleftrightarrow sF(s) - f(0^-)
\end{aligned}$$