UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerking tentamen Signalen en Transformaties (156081) op maandag 26 oktober 2009, 8.45 – 11.45 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

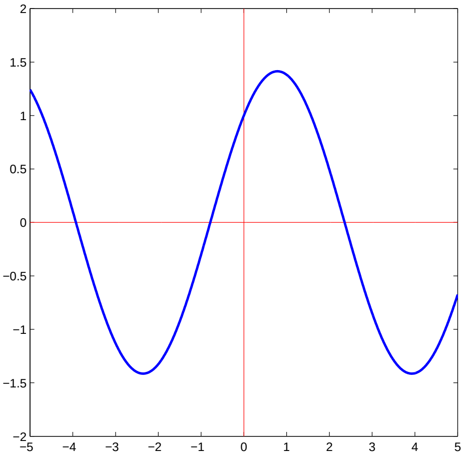
1.

Zij $f(t)$ de functie die wordt gegeven door

$$f(t) = \operatorname{sgn}(\sin(t) + \cos(t))$$

a) Schets de functie $g(t) = \sin(t) + \cos(t)$.

We krijgen:



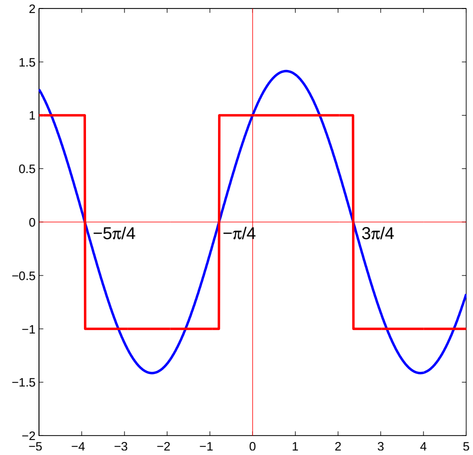
Dit kun je onder andere makkelijk zien als je beseft dat we hebben:

$$\begin{aligned}\sin(t) + \cos(t) &= (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2i})e^{it} + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2i})e^{-it} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4}e^{it} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4}e^{-it} \\ &= \sqrt{2}\cos(t - \tfrac{\pi}{4})\end{aligned}$$

b) Toon aan dat de complexe Fourierreeks van $f(t)$ gelijk is aan:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)\pi i} e^{(2m+1)i\pi/4} e^{i(2m+1)t}$$

Op basis van de grafiek van onderdeel a, zien we dat de functie $f(t)$ gelijk is aan de rode grafiek in onderstaande tekening:



Omdat $T = 2\pi$ hebben we $\omega_0 = 1$. We krijgen:

$$\begin{aligned}
f_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/4}^{7\pi/4} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} e^{-ikt}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_{3\pi/4}^{7\pi/4} e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{-1}{2\pi i k}\left\{\left[e^{-ikt}\right]_{-\pi/4}^{3\pi/4} - \left[e^{-ikt}\right]_{3\pi/4}^{7\pi/4}\right\} \\
&= \frac{i}{2\pi k}\left\{e^{-3ik\pi/4} - e^{ik\pi/4} - e^{-7ik\pi/4} + e^{-3ik\pi/4}\right\} \\
&= \frac{i}{2\pi k}\left\{2e^{-3ik\pi/4} - 2e^{ik\pi/4}\right\} \\
&= \frac{i}{\pi k}\left\{e^{-ik\pi}e^{ik\pi/4} - e^{ik\pi/4}\right\} \\
&= \frac{i}{\pi k}\left\{(-1)^k e^{ik\pi/4} - e^{ik\pi/4}\right\} \\
&= \frac{i}{\pi k}\left((-1)^k - 1\right)e^{ik\pi/4} \\
&= \begin{cases} \frac{-2i}{\pi k}e^{ik\pi/4} & k \text{ odd} \\ 0 & k \text{ even} \end{cases}
\end{aligned}$$

We vinden dus:

$$f_{2m} = 0, \qquad f_{2m+1} = \frac{2}{(2m+1)\pi i}e^{(2m+1)i\pi/4}$$

voor alle m en dus is de complexe Fourierreeks gelijk aan:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikt} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)\pi i}e^{(2m+1)i\pi/4}e^{i(2m+1)t}$$

b) Bereken de reële Fourierreeks van $f(t)$.

We weten dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t).$$

In ons geval geldt dat $\omega_0 = 1$ en $2f_k = a_k - ib_k$ waarbij we de f_k al bij onderdeel (1b) hebben berekend. We hebben:

$$\frac{-2i}{\pi k}e^{ik\pi/4} = \frac{2}{\pi k}\sin(k\pi/4) - i\frac{2}{\pi k}\cos(k\pi/4)$$

Hieruit volgt:

$$a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ even} \\ \frac{4}{\pi k}\sin(k\pi/4) & \text{anders} \end{cases}$$

en

$$b_k = \begin{cases} 0 & k \text{ even} \\ \frac{4}{\pi k}\cos(k\pi/4) & \text{anders} \end{cases}$$

De reële Fourierreeks van $f(t)$ is dus gelijk aan:

$$\tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt).$$

of

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m+1)}\sin((2m+1)\pi/4)\cos((2m+1)t) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m+1)}\cos((2m+1)\pi/4)\sin((2m+1)t).$$

waarbij we $k = 2m+1$ gekozen hebben omdat de even termen toch geen bijdrage leveren.

d) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

We krijgen voor $t \neq -\pi/4 + k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$ dat $f'(t) = 0$. Alleen in de sprongpunten krijgen we een bijdrage. In $-\pi/4$ springt de functie 2 omhoog en in $3\pi/4$ springt de functie 2 omlaag. We hebben dus een afgeleide die weer 2π periodiek is en die voor $t \in [(-\pi/4)^-, (7\pi/4)^-]$ gelijk is aan:

$$2\delta\left(t + \tfrac{\pi}{4}\right) - 2\delta\left(t - \tfrac{3\pi}{4}\right)$$

e) Bepaal het vermogen van f.

Dit kan het makkelijkste in het tijddomein:

$$P_f = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

dus

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t \\ &= 1 \end{aligned}$$

omdat $|\operatorname{sgn}(t)| = 1$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

2.

Voor een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = \frac{t}{t^2+1}$$

a) Bepaal de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ van het systeem.

We hebben:

$$\begin{aligned}
e^{-|t|} &\longleftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2} \\
\frac{2}{1+t^2} &\longleftrightarrow 2\pi e^{-|\omega|} \\
\frac{1}{1+t^2} &\longleftrightarrow \pi e^{-|\omega|} \\
\frac{-it}{1+t^2} &\longleftrightarrow -\pi \operatorname{sgn}(\omega) e^{-|\omega|} \\
\frac{t}{1+t^2} &\longleftrightarrow -i\pi \operatorname{sgn}(\omega) e^{-|\omega|}
\end{aligned}$$

en dus:

$$\hat{h}(\omega) = -i\pi \operatorname{sgn}(\omega) e^{-|\omega|}$$

Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = \sin(t) - \sin(3t)$$

toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

$u(t)$ is een periodiek signaal. Als $u(t)$ een periodiek signaal is met Fourierreeks:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{-ik\omega_0 t}$$

dan hebben we:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k\omega_0) u_k e^{-ik\omega_0 t}$$

In ons geval,

$$u(t) = \tfrac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) - \tfrac{1}{2i}\left(e^{3it} - e^{-3it}\right)$$

en dus:

$$y(t) = \tfrac{1}{2i}\left(\hat{h}(1)e^{it} - \hat{h}(-1)e^{-it}\right) - \tfrac{1}{2i}\left(\hat{h}(3)e^{3it} - \hat{h}(-3)e^{-3it}\right)$$

We hebben:

$$\hat{h}(1) = -i\pi e^{-1}, \quad \hat{h}(-1) = i\pi e^{-1}, \quad \hat{h}(3) = -i\pi e^{-3}, \quad \hat{h}(-3) = i\pi e^{-3}.$$

Hiermee vinden we:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \tfrac{-\pi e^{-1}}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)+\tfrac{\pi e^{-3}}{2}\left(e^{3it}+e^{-3it}\right)\\
&= -\pi e^{-1}\cos(t)+\pi e^{-3}\cos(3t).
\end{aligned}$$

3.

Bepaal de convolutie van $f(t)=e^{t}\,\mathbb{1}(-t)$ en $g(t)=e^{-t}\,\mathbb{1}(t+1)$ op twee verschillende manieren.

We hebben:

$$\begin{aligned}
(f\star g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-\tau}\,\mathbb{1}(\tau-t)e^{-\tau}\,\mathbb{1}(\tau+1)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{t}^{\infty} e^{t-2\tau}\,\mathbb{1}(\tau+1)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

Voor $t>-1$ hebben we:

$$\begin{aligned}
(f\star g)(t) &= \int_{t}^{\infty} e^{t-2\tau}\,\mathrm{d}\tau\\
&= \tfrac{1}{2}e^{-t}
\end{aligned}$$

Aan de andere kant voor $t\le -1$ krijgen we:

$$\begin{aligned}
(f\star g)(t) &= \int_{-1}^{\infty} e^{t-2\tau}\,\mathrm{d}\tau\\
&= \tfrac{1}{2}e^{t+2}
\end{aligned}$$

Als we deze twee gevallen samenvoegen krijgen we:

$$\begin{aligned}
(f\star g)(t) &= \begin{cases}\tfrac{1}{2}e^{-t} & t>-1\\ \tfrac{1}{2}e^{t+2} & t\le -1\end{cases}\\
&= \tfrac{1}{2}e^{-t}\,\mathbb{1}(t+1)+\tfrac{1}{2}e^{t+2}\,\mathbb{1}(-t-1)\\
&= \tfrac{1}{2}e^{1-|t+1|}
\end{aligned}$$

Omdat we geen causale signalen hebben moeten we Fouriertransformatie gebruiken in plaats van Laplacetransformatie.

We hebben:

$$\begin{aligned}
e^{-t}\,\mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{1+i\omega}\\
e^{t}\,\mathbb{1}(-t) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-i\omega}
\end{aligned}$$

De Fouriergetransformeerde van $f(t)$ is dus gelijk aan:

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{1-i\omega}$$

We hebben:

$$\begin{aligned} e^{-t}\,\mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{1+i\omega} \\ e^{-t-1}\,\mathbb{1}(t+1) &\longleftrightarrow \frac{e^{i\omega}}{1+i\omega} \\ e^{-t}\,\mathbb{1}(t+1) &\longleftrightarrow \frac{e^{1+i\omega}}{1+i\omega} \end{aligned}$$

De Fouriergetransformeerde van $g(t)$ is dus gelijk aan:

$$\hat{g}(\omega) = \frac{e^{1+i\omega}}{1+i\omega}$$

Als we deze twee stappen combineren zien we dat de Fouriergetransformeerde van $(f \star g)(t)$ gelijk is aan:

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \frac{1}{1-i\omega}\frac{e^{1+i\omega}}{1+i\omega} = \frac{e^{1+i\omega}}{1+\omega^2}$$

Om de convolutie te bepalen moeten we nu de inverse Fouriertransformatie toepassen. We hebben:

$$\begin{aligned} e^{-|t|} &\longleftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2} \\ \tfrac{1}{2}e^{1-|t|} &\longleftrightarrow \frac{e}{1+\omega^2} \\ \tfrac{1}{2}e^{1-|t+1|} &\longleftrightarrow \frac{e^{1+i\omega}}{1+\omega^2} \end{aligned}$$

en dus vinden we:

$$(f \star g)(t) = \tfrac{1}{2}e^{1-|t+1|}$$

4.

Drie studenten zijn het college aan het nabespreken. Volgens Hermione geldt dat de Fouriercoëfficiënten g_k van $f'(t)$ bepaald kunnen worden uit de Fouriercoëfficiënten f_k van een periodieke functie $f(t)$ via:

$$g_k = ik\omega_0 f_k$$

Volgens Fleur geldt dat dan ook de Fouriercoëfficiënten van

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

bepaald kunnen worden via:

$$g_k = \frac{f_k}{ik\omega_0}$$

Ron vindt dit onzin want als die formules waar zijn dan hadden ze wel in het diktaat gestaan. Volgens Harry is er met die laatste formule iets vreemds aan de hand want g_0 is niet goed gedefinieerd dus je zult wel aan moeten nemen dat $f_0 = 0$ maar met die extra voorwaarde denkt hij dat die formule voor de primitieve wel waar zal zijn. Geef voor elk van de studenten aan of ze gelijk dan wel ongelijk hebben en waarom.

Ten eerste heeft Hermione natuurlijk gelijk. Dit kun je uit de definitie halen:

$$\begin{aligned}
g_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f'(t)e^{-ik\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\Big[f(t)e^{-ik\omega_0 t}\Big]_0^T + \frac{1}{T}\int_0^T ik\omega_0 f(t)e^{-ik\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\Big(f(T)e^{-ik\omega_0 T} - f(0)\Big) + ik\omega_0\left(\frac{1}{T}\int_0^T ik\omega_0 f(t)e^{-ik\omega_0 t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= ik\omega_0 f_k
\end{aligned}$$

waarbij we eerst partiële integratie toe hebben gepast en daarna hebben benut dat:

$$f(T) = f(0), \qquad \text{en} \qquad e^{-ik\omega_0 T} = e^{-ik2\pi} = 1$$

en

$$f_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

Fleur heeft ongelijk. Natuurlijk niet wegens het onzin argument van Ron. Harry ziet wel een probleem in de formule voor de integratie maar het probleem is veel fundamenteler. Voor een periodieke functie die niet gelijk is aan nul bestaat de integraal niet:

$$\int_{-\infty}^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

omdat de volgende limiet niet is gedefinieerd:

$$\lim_{s\to-\infty}\int_s^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Dit volgt uit het feit dat

$$\lim_{s\to-\infty} f(s)$$

alleen gedefinieerd is voor een periodieke functie als f een constante functie is en voor het bestaan van de integraal moet er ook nog 0 uit komen, hetgeen impliceert dat $f(t) = 0$ voor alle t.

Als we een periodieke functie hebben die gemiddeld nul is, d.w.z.

$$f_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

dan is de primitieve weer periodiek. Als $F(t)$ een primitieve is met gemiddelde nul (die is uniek) dan geldt dat de Fourierreeks van $F(t)$ gelijk is aan:

$$g_k = \frac{f_k}{ik\omega_0} \tag{1}$$

voor $k \neq 0$ en $g_0 = 0$. Alle mogelijke andere primitieven worden gegeven door:

$$F(t) + C$$

met C een constante en voldoen met hun Fourierreeks ook aan (1) voor $k \neq 0$ maar met $g_0 = C$. Alleen geen enkele primitieve kun je schrijven via de integraal die gegeven wordt in de opgave.

5.

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) = u^{(1)}(t) - u(t). \tag{2}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (2).

We hebben omdat alle begincondities nul zijn

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) = sU(s) - U(s)$$

en dus:

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2+2s} U(s)$$

We vinden de impulsresponsie door de inverse Laplace transformatie los te laten op de overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2+2s}$$

We gaan eerst breuksplitsen:

$$H(s) = \frac{s-1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

Voor de constanten moet gelden:

$$A(s+2) + Bs = s - 1$$

Voor $s = 0$ krijgen we $A = -1/2$; voor $s = -2$ krijgen we $B = -3/2$. We krijgen dan de impulsresponsie:

$$h(t) = -\tfrac{1}{2}\,\mathbb{1}(t) - \tfrac{3}{2}e^{-2t}\,\mathbb{1}(t)$$

b) Bepaal de stapresponsie van (2).

We hebben voor $t > 0$:

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_{0-}^{t} -\tfrac{1}{2}\,\mathbb{1}(\tau) - \tfrac{3}{2}e^{-2\tau}\,\mathbb{1}(\tau)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{0-}^{t} -\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}e^{-2\tau}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\tfrac{1}{2}\tau + \tfrac{3}{4}e^{-2\tau}\right]_0^t \\
&= -\tfrac{1}{2}t + \tfrac{3}{4}e^{-2t} - \tfrac{3}{4}
\end{aligned}$$

We krijgen dus:

$$g(t) = \left(-\tfrac{1}{2}t + \tfrac{3}{4}e^{-2t} - \tfrac{3}{4}\right)\mathbb{1}(t)$$

c) Als ingang kiezen we $u(t) = e^{-2t}\,\mathbb{1}(t)$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (2) met $y(0^-) = 1$ en $y'(0^-) = -1$.

Als de begincondities niet nul zijn krijgen we:

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &\longleftrightarrow sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 1 \\ y^{(2)}(t) &\longleftrightarrow s(sY(s) - 1) - y'(0^-) = s^2Y(s) - s + 1 \end{aligned}$$

We krijgen:

$$(s^2 + 2s)Y(s) - s - 1 = (s - 1)U(s)$$

en dus

$$(s^2 + 2s)Y(s) = s + 1 + (s - 1)U(s)$$

Omdat $u(t) = e^{-2t}\,\mathbb{1}(t)$ krijgen we $U(s) = \frac{1}{s+2}$ en

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+1}{s(s+2)} + \frac{s-1}{s(s+2)^2} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} \end{aligned}$$

Voor de constanten moet gelden:

$$A(s+2)^2 + Bs(s+2) + Cs = s - 1 + (s+2)(s+1) = s^2 + 4s + 1$$

Voor $s = 0$ krijgen we $A = 1/4$; voor $s = -2$ krijgen we $C = 3/2$ en tot slot krijgen we als we naar de hoogste macht kijken dat $A + B = 1$ en dus $B = 3/4$. We vinden:

$$\mathbb{1}(t) + \tfrac{5}{3}e^{t}\,\mathbb{1}(t) - \tfrac{2}{3}e^{-2t}\,\mathbb{1}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{s-1} + \frac{s-2}{s(s+2)(s-1)}$$

Dat levert op voor $t > 0$:

$$y(t) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}e^{-2t} + \tfrac{3}{2}te^{-2t}$$