UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen Signalen en Transformaties (156081) op maandag 18 januari 2010, 13.45 – 16.45 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

---

1. Zij $f(t)$ de functie die wordt gegeven door

$$f(t) = |\sin(t) - \cos(t)|$$

   a) Toon aan dat $g(t) = \sin(t) - \cos(t)$ een sinusoïde is en bepaal de amplitude en beginfase.

   b) Toon aan dat de complexe Fouriercoëfficiënten van $f(t)$ gelijk zijn aan:

$$f_k = \frac{2\sqrt{2}}{\pi(1-4k^2)} e^{-ik\pi/2}$$

   c) Bereken de reële Fourierreeks van $f(t)$.

   d) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

   e) Bepaal het vermogen van f.

2. Voor een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = \mathrm{rect}_2(2t+1)$$

   a) Bepaal de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ van het systeem.

   Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = \sin(t) + \cos(t)$$

   toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

   b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

3. Bepaal de convolutie van $f(t) = e^{2t}\,\mathbb{1}(-t)$ en $g(t) = e^{1-t}\,\mathbb{1}(t)$ op twee verschillende manieren.

z.o.z.

---

4. Drie studenten zijn het college aan het nabespreken. Ze vragen zich af waarom de Laplace transformatie eigenlijk niet gedefinieerd wordt als:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

want de reguliere enkelzijdige Laplacetransformatie kan alleen maar met causale signalen omgaan. Volgens Cedric had dit te maken met het feit dat anders voor sommige onbegrensde functies, zoals bijvoorbeeld exponentiële functies, de Laplace transformatie niet gedefinieerd zou zijn. Volgens Luna was het probleem dat de inverse Laplace transformatie anders niet goed gedefinieerd was omdat $e^t\,\mathbb{1}(t)$ en $-e^t\,\mathbb{1}(-t)$, volgens deze definitie, dezelfde Laplace transformatie hebben. Volgens Oliver was het probleem dat de lineariteit in de problemen komt omdat het kan voorkomen dat de Laplace getransformeerden

$$F(s) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$
$$G(s) := \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

niet opgeteld kunnen worden omdat er geen enkele $s \in \mathbb{C}$ is waarvoor beide integralen tegelijkertijd goed gedefinieerd zijn.

Geef voor elk van de studenten aan of ze gelijk dan wel ongelijk hebben en waarom.

5. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) = u^{(1)}(t) - u(t). \tag{1}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

b) Bepaal de stapresponsie van (1).

c) Als ingang kiezen we $u(t) = e^t$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 1$ en $y'(0^-) = 0$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	12 punten	Vraagstuk	3.	8 punten	Vraagstuk	5.	12 punten
Vraagstuk	2.	12 punten	Vraagstuk	4.	10 punten			

Het cijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 6 punten op te tellen en dan door 6 te delen.

Formuleblad Signalen en Transformaties (156081)

INTEGRAALTRANSFORMATIES

Tabel Fourier transformaties

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
$\mathrm{rect}_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } \lvert t\rvert < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > \frac{a}{2} \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{2\sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{\omega}$
$\mathrm{trian}_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t\rvert}{a} & \text{voor } \lvert t\rvert < a \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > a \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{4\sin^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert}$, $\operatorname{Re} a > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\,\mathbb{1}(t)$, $\operatorname{Re} a > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(a+i\omega)^{n+1}}$
e^{-at^2}, $a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\left(\frac{-\omega^2}{4a}\right)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t > 0 \\ 0 & \text{voor } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$

Tabel Laplace transformaties

$$\boxed{F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt}$$ éénzijdige Laplace transformatie

$f(t)$	$F(s)$	conv. abscis
$e^{at}\,\mathbb{1}(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re} a$
$\frac{t^n}{n!}e^{at}\,\mathbb{1}(t),\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} a$
$\cos(bt)\,\mathbb{1}(t),\ \ b \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	0
$\sin(bt)\,\mathbb{1}(t),\ \ b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	0
$\delta(t)$	1	$-\infty$

Rekenregels

Fourierreeksen (periode T, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$)

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow f_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ik\omega_0 t}\,dt \\
f(t-\tau) &\longleftrightarrow e^{-ik\omega_0\tau} f_k \\
e^{in\omega_0 t} f(t) &\longleftrightarrow f_{k-n} \qquad (n \text{ geheel})
\end{aligned}$$

Fourier transformatie

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow \hat{f}(\omega) \\
f(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega) \qquad (t_0 \in \mathbb{R}) \\
e^{i\omega_0 t} f(t) &\longleftrightarrow \hat{f}(\omega-\omega_0) \qquad (\omega_0 \in \mathbb{R}) \\
f'(t) &\longleftrightarrow i\omega\hat{f}(\omega) \\
\hat{f}(t) &\longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)
\end{aligned}$$

Laplace transformatie

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow F(s) \\
f(t-t_0)\,\mathbb{1}(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-st_0}F(s) \qquad (t_0 \geq 0) \\
e^{s_0 t} f(t) &\longleftrightarrow F(s-s_0) \qquad (s_0 \in \mathbb{C}) \\
f'(t) &\longleftrightarrow sF(s) - f(0^-)
\end{aligned}$$