FACULTEIT MANAGEMENT en BESTUUR
Kenmerk: OMPL07.011/lw
Datum: 30 maart 2007

TENTAMEN STOCHASTISCHE MODELLEN IN OPERATIONS MANAGEMENT (153088)

Dinsdag 10 april 2007, 9.00-12.00 uur

Opmerkingen vooraf:
1. Gelieve het blok **bovenaan** het tentamformulier in te vullen, inclusief studentnummer, opleiding en vakcode.
2. Het gebruik van boeken, syllabi, **grafische rekenmachines** of aantekeningen is **niet** toegestaan bij dit tentamen. Een eenvoudige rekenmachine is wel toegestaan.
3. Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
4. De score voor dit tentamen is gelijk aan (aantal behaalde punten+4)/4.
5. **Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd en waar nodig van een berekening te worden voorzien.**

Opgave 1 (9 punten)

Sjonnie heeft een nieuwe auto besteld bij zijn dealer. Over 4 weken kan hij hem ophalen. Voordat het zover is, wil hij zijn oude auto nog verkopen. Zijn dealer heeft hem er 450 euro voor geboden. Toch wil Sjonnie het ook nog even proberen via internet veilingen. Elke veiling duurt 1 week. Biedingen komen binnen gedurende de week en blijven de hele week geldig. Het heeft daarom geen zin hier tussentijds op te reageren. Aan het einde van de week ben je natuurlijk alleen geïnteresseerd in het hoogste bod. Ben je niet tevreden met het hoogste bod, dan heb je de mogelijkheid een nieuwe veiling te starten. Sjonnie schat zijn kansen in elke veiling als volgt in:

Hoogste bod	Kans
400	0.4
500	0.3
600	0.2
700	0.1

Zoals gezegd, wil Sjonnie zijn oude auto verkocht hebben uiterlijk aan het einde van week 4. Hij kan dus maximaal 4 veilingen starten voor zijn oude auto. De kosten van een veiling zijn 25 euro. Deze bestaan uit advertentiekosten, maar ook uit kosten voor het langer houden van de oude auto (verzekering en belasting). Het aanbod van de dealer blijft geldig, Sjonnie kan dus op elk moment terugvallen op het bod van 450 euro.

a) Welke keuzes heb je op de verschillende beslismomenten?
b) Benoem de fasen n, toestanden i, beslissingen d, en optimale waardefunctie $f_n(i)$ behorende bij dit stochastische dynamische programmeringsprobleem.
c) Geef de recurrente betrekking (recursie) voor de optimale waardefunctie.

d) Bepaal de optimale politiek door het opstellen van een *“policy table”* (beslissingen voor elke fase en toestand). Wat is de maximale verwachte opbrengst voor Sjonnie’s oude auto?

Opgave 2 (9 punten)

Vrachtwagenbestuurder Jack bezit een eigen vrachtwagen waarmee hij internationaal transport rijdt. Jack vervoert een type lading waarvan elke dag om 7 uur ‘s morgens, transportorders worden aangeboden. Zo’n transportorder bestaat uit het vervoeren van lading tussen twee verschillende landen. Een transportorder moet altijd dezelfde dag (d.w.z. de dag waarop hij is aangeboden) nog worden geleverd op zijn bestemming. De transporttijden zijn natuurlijk zodanig dat dit ook mogelijk is. Indien Jack een nachtje slaap overslaat, lukt het hem zelfs om na levering van een order leeg naar een ander land te rijden en daar aan te komen voor 7 uur de volgende morgen, dus nog voor de volgende aanbiedingsronde van transportorders.

Jack kan er zeker van zijn dat hij elke dag een nieuwe order ontvangt. Vanwege concurrentie en beperkingen op de levertijden zal dit echter nooit een order zijn die vertrekt uit een ander land dan waar hij op dat moment aanwezig is. De kans op een order tussen een vertrekland en bestemmingsland, gegeven dat Jack zich bevindt in het vertrekland, wordt gegeven door:

van \ naar	Land A	Land B	Land C
Land A	0	1/3	2/3
Land B	1/3	0	2/3
Land C	1/3	2/3	0

De winst van Jack bestaat uit directe opbrengsten voor het vervoeren van lading (gegeven door inkomsten van orders minus de bijbehorende transportkosten) minus zijn kosten voor leeg rijden. Omdat de directe opbrengst van de diverse trajecten nogal verschilt, is het voor Jack belangrijk dat hij na levering van een order goed bedenkt of hij in het huidige land wil wachten of leeg naar een ander land wil rijden. Het beslismoment van Jack is dus altijd aan het einde van de dag na levering van een order!

De directe opbrengst op een dag vanaf een bepaald vertrekland is stochastisch omdat deze bepaald wordt door de onzekere bestemming van de transportorder. Gelukkig kan Jack ook een beetje modelleren. Hij heeft daarom alvast een tabel opgesteld voor de verwachte directe opbrengsten in een dag, gegeven een bepaalde vertreklocatie:

	Verwachte directe opbrengst
Land A	6
Land B	9
Land C	3

De kosten voor het leeg rijden naar een ander land worden gegeven door:

van \ naar	Land A	Land B	Land C
Land A	0	3	4
Land B	3	0	2
Land C	4	2	0

Indien Jack besluit leeg te rijden naar een ander land, dan moeten de kosten hiervan in mindering worden gebracht op de verwachte directe opbrengst in het nieuwe land. Jack wil een politiek opstellen zodanig dat zijn verdisconteerde winst (disconteringsfactor van 0.9) gemaximaliseerd wordt.

a) Modelleer dit probleem als een Markov beslissingsproces.
b) Geef de optimaliteitsvergelijkingen.
c) Geef een LP model waarmee de optimale politiek bepaald kan worden.
d) Beschouw de politiek [A,B,C], d.w.z. ga na het leveren van een order nooit leeg naar een ander land. Voer 1 iteratie *policy iteration* uit, om te controleren of deze politiek optimaal is. Zo niet, geef dan de nieuwe politiek.

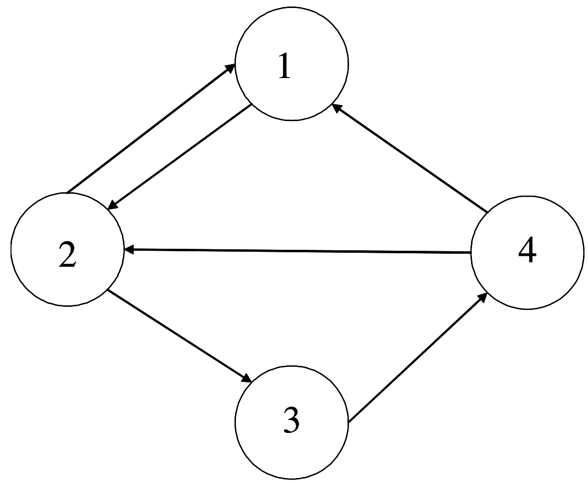
Opgave 3 (10 punten)
Beschouw een wachtsysteem met eindige wachtruimte. Er kunnen maximaal 4 klanten in het systeem aanwezig zijn. Klanten arriveren in groepjes volgens een Poissonproces met intensiteit λ. De groepsgrootte is 1, 2 of 3 personen. De kans op aankomst van een groepje met 1, 2 of 3 personen is gelijk aan 1/3. Indien bij aankomst van een groepje de groep niet in zijn geheel naar binnen kan, dan vertrekt zo'n groepje en keert niet meer terug. Bediening vindt individueel plaats. De bedieningsduur is negatief exponentieel verdeeld met gemiddelde μ^{-1}. Neem aan dat de bedieningsduren onderling onafhankelijk zijn en onafhankelijk van het aankomstproces.

a) Teken een transitiediagram voor deze situatie.
b) Bepaal de evenwichtsvergelijkingen. (Oplossen van de vergelijkingen wordt niet gevraagd!)

De antwoorden van onderstaande vragen mogen uitgedrukt worden in de stationaire kansen P(n), μ en λ.

c) Geef een uitdrukking voor het gemiddeld aantal klanten dat het systeem binnengaat.
d) Geef een uitdrukking voor het gemiddeld aantal klanten dat wacht op bediening.
e) Geef een uitdrukking voor de gemiddelde verblijftijd van een klant in het systeem.
f) Wat is de gemiddelde duur van een periode dat de server onbezet is?

Opgave 4 (8 punten)
Beschouw de onderstaande Markov keten.



De overgangskansen van toestand i naar toestand j worden gegeven in de volgende tabel:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Bepaal de stationaire kansverdeling voor deze Markov keten.
b) Bepaal het verwachte aantal overgangen dat nodig is om vanuit toestand 1 voor het eerst toestand 3 te bereiken.

Beschouw de Markov keten nu als een gesloten netwerk. We spreken vanaf nu van stations in plaats van toestanden.
Neem aan dat er m = 2 klanten in het systeem aanwezig zijn.
Neem aan dat ieder station een enkele server heeft en dat in de wachtruimtes bij de stations plaats is voor alle aankomende klanten. De gemiddelde bedieningsduur bij de verschillende werkstations bedraagt resp. $\mu_1^{-1} = \mu_2^{-1} = \mu_4^{-1} = 53/12$ minuut en $\mu_3^{-1} = 53/24$ minuut.

c) Bepaal m.b.v. *mean value analysis* het verwachte aantal klanten en de gemiddelde verblijftijd bij de 4 stations voor m = 2. (Hint: Laat breuken staan, dan vallen er regelmatig termen tegen elkaar weg. Check: $\lambda_2(1) = 2444/24857$)
d) Geef aan hoe m.b.v. het algoritme van Buzen bepaald kan worden hoe groot in de stationaire situatie de bezettingsgraad van werkstation 3 is. De bezettingsgraad hoeft NIET berekend te worden.