

## Tentamen

Stochastische Modellen in Operations Management (191530881)

Dinsdag 17 April 2012, 8.45 - 11.45 uur

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.  
Eindcijfer =  $(10 + \text{aantal behaalde punten})/10$ .  
Vermeld ook uw studentnummer op uw werk.

### Opgave 1. (20 punten)

Een internationaal opererend bedrijf overweegt 4 nieuwe vestigingen op te zetten. Voor deze vestigingen komen 4 landen in aanmerking. De totale verwachte winst die voortvloeit uit het openen van  $k$  vestigingen in land  $n$  wordt gegeven door onderstaande tabel:

Aantal vestigingen	Land 1	Land 2	Land 3	Land 4
0	0	0	0	0
1	43	39	23	36
2	79	63	48	46
3	100	78	71	54
4	121	86	88	58

Hoeveel vestigingen in hoeveel landen moet het bedrijf opzetten opdat de totale verwachte winst maximaal wordt?

(a) Formuleer het probleem als een dynamisch programmeringsprobleem. Wat kiest u als

- fasen (beslissingstijdstippen)
- toestanden
- beslissingen
- optimale-waarde functie.

(b) Geef de recurrente betrekking voor de optimale waarde functie.

(c) Bepaal (via dynamische programmering) de oplossing van het probleem.

**Opgave 2.** (25 punten)

Een produktiemachine kan zich aan het einde van een dag in drie toestanden bevinden: toestand 0 (=goed), 1 (= matig) of 2 (=slecht). De toestand kan met zekerheid worden afgeleid uit het percentage defecte onderdelen dat de afgelopen dag is geproduceerd. Is de toestand aan het einde van dag  $i$  gelijk aan 2 dan wordt de machine gerepareerd en is de begintoestand op dag  $i + 1$  weer 0. Is de eindtoestand op dag  $i$  gelijk aan 1 dan heeft men de keuze uit *niet* repareren of *wel* repareren. In het eerste geval is de begintoestand op dag  $i + 1$  weer 1, in het tweede geval 0. De overgangskansen  $p_{nm}$  tussen de toestanden aan het begin van de dag (toestand  $n$ ) en het einde van de dag (toestand  $m$ ) zijn bekend:

$$p_{01} = \frac{1}{4} \quad p_{00} = \frac{3}{4} \quad p_{12} = \frac{1}{2} \quad p_{11} = \frac{1}{2}$$

De reparatiekosten bedragen 8 per reparatie (de reparatietijd wordt verwaarloosd). De operationele kosten op een dag  $c(i)$ ,  $i = 0, 1$ , hangen op de volgende manier af van de begintoestand

$$c(0) = 10 \text{ en } c(1) = 16.$$

Gezocht wordt een reparatiepolitiek welke de verwachte totale verdisconteerde kosten over een oneindige horizon minimaliseert. De disconteringsfactor is  $\alpha = 0.95$ .

- (a) Geef de betekenis van de optimale waardefunctie. Geef de optimaliteitsvergelijkingen.
- (b) Geef twee iteraties van de waarde-iteratie methode.
- (c) Bepaal de optimale politiek m.b.v. de politiek-iteratie methode.
- (d) Formuleer het LP-model voor dit probleem.

**Opgave 3.** (25 punten)

Maestro Henrico is een fameus haarkunstenaar. Van heinde en verre stromen de klanten toe om zich in zijn salon te laten knippen. De maestro werkt uit een ingeworteld principe niet volgens afspraak. Hij heeft een aantal uitgesproken ideeën die een behandeling voor de klant tot een speciale ervaring maken. De salon bestaat uit twee luxueus uitgevoerde suites: een wassuite en een knipsuite. Beide suites bieden slechts plaats aan hooguit 1 klant. Iedere klant die in de salon bediend wordt, ondergaat eerst een wassessie en dan een knipsessie. Preciezer gezegd: iedere klant dient, of dat nu echt nodig is of niet, allereerst zijn haar door assistente Elvira te laten wassen in de wassuite; pas daarna betreedt de klant de knipsuite zodra deze suite vrij is. Hij wordt in de knipsuite behandeld door de maestro zelve. Een klant die de salon wil binnengaan en de wassuite bezet vindt verlaat de salon onmiddellijk. Aan de andere kant, wanneer de knipsuite bezet is op het moment dat Elvira de wassessie van een klant beëindigt, dan moet de klant in de wassuite blijven wachten tot de behandeling door de maestro van de andere klant in de knipsuite is afgelopen. We zeggen dan dat de service in de wassuite *geblokkeerd* wordt door die in de knipsuite.

Per uur arriveren gemiddeld 2 klanten volgens een Poissonproces bij de salon. De duur van de wassessie is negatief exponentieel verdeeld met verwachting 20 minuten. De duur van de knipsessie is negatief exponentieel verdeeld met verwachting 40 minuten.

- (a) Welke 5 toestanden kun je onderscheiden?
- (b) Teken een plaatje van de toestandsruimte met de overgangsintensiteiten.
- (c) Stel de evenwichtsvergelijkingen op.
- (d) Bepaal de evenwichtskansen.
- (e) Hoe groot is de kans dat er blokkering optreedt?
- (f) Bepaal de doorzet, i.e., het aantal klanten per uur dat bij de salon arriveert en ook daadwerkelijk bediend wordt.
- (g) Hoeveel tijd heeft naar verwachting een klant die service heeft genoten wachtend doorgebracht in de wassuite totdat de blokkering was opgeheven?

**Opgave 4.** (20 punten)

Beschouw de Markov keten met 4 toestanden en overgangskansen  $p_{ij}$  van toestand  $i$  naar toestand  $j$  als volgt:

$$p_{12} = 1 \quad p_{23} = \frac{1}{3} \quad p_{24} = \frac{2}{3} \quad p_{34} = 1 \quad p_{41} = \frac{1}{2} \quad p_{42} = \frac{1}{2}$$

- (a) Bepaal de stationaire kansverdeling van deze Markov keten.
- (b) Bepaal het verwachte aantal overgangen dat nodig is om vanuit toestand 1 voor het eerst toestand 4 te bereiken, en het verwachte aantal overgangen dat nodig is om vanuit toestand 4 voor het eerst toestand 1 te bereiken.

Beschouw de Markov keten nu als gesloten netwerk van wachtrijen. We spreken nu van stations in plaats van toestanden. Ieder station bezit 1 server, en iedere aankomende klant kan worden opgenomen in de wachtrij. Bediening is in volgorde van binnenkomst. De bedieningsduren bij de stations zijn exponentieel verdeeld, en de verwachte bedieningsduren in de vier stations zijn respectievelijk:  $1/\mu_1 = 4$ ,  $1/\mu_2 = 3$ ,  $1/\mu_3 = 2$ ,  $1/\mu_4 = 1$ . Het netwerk is dus een gesloten netwerk van  $M/M/1$  rijen.

- (c) Bepaal m.b.v. Mean Value Analyse het verwachte aantal klanten en de verwachte verblijftijd in de vier stations voor een netwerk met 1 klant en voor een netwerk met 2 klanten.
- (d) Bepaal m.b.v. het algoritme van Buzen voor het netwerk met 2 klanten de kans dat er  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$  klanten aanwezig zijn bij de verschillende stations.
- (e) Wat is de bezettingsgraad van station 1 voor het netwerk met 1 klant en voor het netwerk met 2 klanten?