Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Afdeling der Toegepaste Wiskunde
Universiteit Twente

Datum: 24 oktober 2008
Kenmerk: EWI08/TW/SP/001/DM

Tentamen Wiskundige Statistiek (153038)
Vrijdag 1 februari 2008 van 9.00-12.00 uur

N.B. Tot één uur na aanvang van het tentamen kunt u besluiten alsnog van deelname af te zien. U moet uw werk dan wèl afgeven aan de surveillant, maar als u erop vermeld heeft "AFGEZIEN VAN DEELNAME", wordt het niet beoordeeld.

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven, tabellen en enige formules (zie na opgave 4)
Motiveer steeds uw antwoorden.
Vermeld ook uw studentnummer op werk en tentamenbriefje.

Opgave 1

Beschouw twee onafhankelijke aselecte steekproeven uit normale verdelingen: $X_1, \ldots, X_m$ met verwachting μ_1 en variantie σ_1^2 en $Y_1, \ldots, Y_n$ met verwachting μ_2 en variantie σ_2^2.
Uitvoering van de steekproeven leverde de volgende gegevens en uitkomsten op:

$$m = 15,\ n = 11,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 22,\ \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = 500,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 15,\ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 410.$$

a. Geef een betrouwbaarheidsinterval voor de verwachting μ_1 met een betrouwbaarheid van 95%.

b. Toets de hypothese H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Gebruik $\alpha_0 = 0.10$.

Opgave 2

Van de stochastische variabele X wordt de kansdichtheid f voor zekere $\beta > 0$ gegeven door:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} x^{-\frac{1}{\beta}-1} \quad \text{voor } x \geq 1$$

en $$f(x) = 0 \quad \text{voor } x < 1$$

a. Leid af dat $\beta^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)$ de meest aannemelijke schatter van β is.

b. Toon aan dat β^* een zuivere schatter is.
(Aanwijzing: de berekeningen bij onderdelen b en c vereenvoudigen als je eerst aantoont dat $\ln(X)$ exponentieel verdeeld is met verwachtingswaarde β)

c. Ga na of β^* een consistente schatter is.

Opgave 3
Hat aantal telefoongesprekken dat per minuut bij een centrale binnenkomt, is Poisson-verdeeld met parameter μ. Gedurende n minuten hebben we dit aantal gesprekken geteld.

a. Geef een toets voor H_0: $\mu \leq 9$ tegen H_1: $\mu > 9$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$. Geef de kritieke waarde als functie van n en ga er vanuit dat n groot is.
b. Bepaal hoe groot n moet zijn opdat het onderscheidend vermogen voor $\mu = 10$ minstens 0.95 is.

Opgave 4
Als uitkomst van een aselecte steekproef van een stochastische variabele X zijn de volgende 12 waarden waargenomen:

4.71, 7.03, 1.15, 10.11, 8.85, 3.14, 11.66, 0.81, 2.93, 9.15, 6.42, 5.88

Van de kansdichtheid van X is slechts bekend, dat deze symmetrisch is om het punt μ, d.w.z.:

$$f_X(\mu + x) = f_X(\mu - x) \text{ voor alle reële } x.$$

a. Waarom kan bij een toets op μ op basis van bovenstaande geen t-toets worden toegepast?
b. Toets bij onbetrouwbaarheidsdrempel 0.05 de nulhypothese H_0: $\mu = 10$ tegen de alternatieve hypothese H_1: $\mu < 10$.
c. Bepaal een naar boven begrensd betrouwbaarheidsinterval voor μ met een betrouwbaarheid ten minste 0.95.

Enige formules bij tentamen wiskundige statistiek van 1 februari 2008

- Exponentiële verdeling: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$
  $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}, \quad \text{var}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ en $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$
- Poisson verdeling: $P(X = x) = \dfrac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots.$
  $E(X) = \mu$ en $\text{var}(X) = \mu$.

Normering:

1		2			3		4			Totaal	Eindcijfer = 1 + 9×aantal punten/22 + evt. bonuspunt
a	b	a	b	c	a	b	a	b	c		
2	3	3	2	2	2	2	1	3	2	22	

Tabellen: B(n, p)-, Poisson-, N(0,1)-, Student-, chikwadraat- en F-tabellen.