Uitwerking **Tentamen Wiskundige Statistiek (191530382),** 4 november 2011

Opgave 1

a. We passen het standaard interval $\left(\frac{(n-1)S^2}{c_2}, \frac{(n-1)S^2}{c_1}\right)$ toe. $\left(Volgt\ uit\ P\left(c_1 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq c_2\right) = \gamma\right)$

Hierin is $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{25-1}\left[\sum_{i=1}^{25} X_i^{\,2} - \frac{1}{25}(\sum_{i=1}^{25} X_i)^2\right] = \frac{1}{24}\left[5.05 - \frac{1}{25}(7.65)^2\right] \approx 0.1129$

En $P(W(24) \leq c_1) = P(W(24) \geq c_2) = \frac{1-\gamma}{2} = 0.05$, zodat $c_1 = 13.8$ en $c_2 = 36.4$

Invullen geeft het numerieke betr. interval voor σ^2 : $\left(\frac{(n-1)s^2}{c_2}, \frac{(n-1)s^2}{c_1}\right) = \left(\frac{24\times 0.1129}{36.4}, \frac{24\times 0.1129}{13.8}\right) \approx (0.074, 0.196)$

b. We gebruiken nu de schatter van σ^2 bij bekende μ:

$S_\mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - 2\mu\sum_{i=1}^{n} X_i + n\mu^2\right]$ waarvoor geldt $\frac{nS_\mu^2}{\sigma^2} \cong W(n)$

Uit $P\left(c_1 \leq \frac{nS_\mu^2}{\sigma^2} \leq c_2\right) = \gamma$ volgt het betr. int. voor σ^2: $\left(\frac{nS_\mu^2}{c_2}, \frac{nS_\mu^2}{c_1}\right)$

Hierin is $S_\mu^2 = \frac{1}{25}[5.05 - 2 \times 0.315 \times 7.65 + 25 \times 0.315^2] \approx 0.1084$

En $P(W(24) \leq c_1) = P(W(24) \geq c_2) = \frac{1-\gamma}{2} = 0.05$, zodat $c_1 = 14.6$ en $c_2 = 37.7$

$\left(\frac{nS_\mu^2}{c_2}, \frac{nS_\mu^2}{c_1}\right) = \left(\frac{25\times 0.1084}{37.7}, \frac{25\times 0.1084}{14.6}\right) \approx (0.072, 0.186)$

Opgave 2

Toets op de verwachtingswaarde A = het verwachte aantal tikken in een minuut .

$X_1, X_2, \ldots, X_t$ zijn de gemeten aantallen in t minuten: o.o. en Poisson verdeling met parameter A

Als toetsingsgrootheid nemen we het totaal aantal tikken in *t* minuten $T = \sum_{i=1}^{t} X_i$

(Je kunt natuurlijk ook $\overline{X} = \frac{T}{t}$ *als toetsingsgrootheid nemen, dan heeft* $\overline{X}$ *bij ben. een N(A, A/t)-verdeling).*

voor grote *t* is *T* onder H_0: A = 5 bij benadering N(t×5, t×5)-verdeeld en als H_1: A = 6 waar is: $T \cong N(6t, 6t)$.

Kritieke grens voor deze rechtseenzijdige toets (*we passen geen cont.corr. toe*) :

$P_{A=5}(T \geq c) \leq \alpha_0 = 0.025 \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{c-5t}{\sqrt{5t}}\right) \geq 0.975 \Rightarrow \quad \frac{c-5t}{\sqrt{5t}} \geq 1.96 \Rightarrow \quad c \geq 5t + 1.96\sqrt{5t} \quad (c\ is\ een\ geheel\ getal)$

Onderscheidend vermogen: $P_{A=6}(T \geq c) = 1 - \Phi\left(\frac{c-6t}{\sqrt{6t}}\right) = 1 - \Phi\left(-\sqrt{\frac{t}{6}} + 1.96\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \geq 0.99$

Dus $\Phi\left(-\sqrt{\frac{t}{6}} + 1.96\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \leq 0.01 \Rightarrow \quad -\sqrt{\frac{t}{6}} + 1.96\sqrt{\frac{5}{6}} \leq -2.33 \Rightarrow \quad t \geq 6 \times \left(2.33 + 1.96\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^2 \approx 101.8$

Dus *t* =102 minuten (of meer)

(- Achteraf zien we dat het aantal groot genoeg is voor toepassing van de CLS en

- Toepassen van continuïteitscorrectie geeft hetzelfde resultaat)

Opgave 3

a. De aannemelijkheidsfunctie is $L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} f_\mu(x_i) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu)^2}\right]$. met $\mu \in \mathbb{R}$

En dus de loglikelihoodfunctie $L^*(\theta) = \ln L(\theta) = -\frac{n}{2}\ln\pi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$

Maximum van *L (L*)* bepalen: $\frac{d}{d\mu}L^*(\mu) = +\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$ als $\mu = \bar{x}$

Voor deze waarde van μ is *L (L*)* maximaal daar $\frac{d^2}{d\mu^2}L^*(\mu) = -n < 0$

Dus de meest aannemelijke schatter van μ is μ* = $\overline{X}$

b. De gevraagde MP-toets verwerpt de nulhypothese voor grote $T = \frac{f_{\mu=5}(x)}{f_{\mu=0}(x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-5)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2+5x-\frac{25}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}} = e^{5x-\frac{25}{2}}$

Verwerpen voor grote *T* is equivalent met verwerpen voor grote *x*: **verwerp H_0 als $X \geq c$,**

Bepalen kritieke waarde: *c* = 1.28, omdat *X* ≅ N(0, 1) onder H_0, zodat $P_{\mu=0}(X \geq c) \leq \alpha_0 = 0.10$.

(*Opmerking:* $X \geq 1.28 \quad \Leftrightarrow \quad T \geq e^{5\times 1.28 - \frac{25}{2}}$)

c. $\Lambda = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0}\prod_{i=1}^{n} g(x_i,\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta}\prod_{i=1}^{n} g(x_i,\theta)} = \frac{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x_i^2}}{\sup_{\mu\geq 0}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu)^2}}$. Dus $\Lambda = \frac{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x_i^2}}{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_i-\bar{x})^2}} = e^{-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n}{2}\bar{x}^2} = e^{-\frac{n}{2}\bar{x}^2}$,

want het maximum in de noemer wordt aangenomen voor $\mu = \bar{x}$ (zie a), indien $\bar{x} > 0$ (als $\bar{x} < 0$ wordt het maximum in de noemer aangenomen in het randpunt $\mu = 0$, zodat $\Lambda = 1$, de grootste waarde van Λ)
H_0: $\mu = 0$ verwerpen ten gunste van H_1: $\mu > 0$ voor kleine waarden van Λ is dus equivalent met verwerpen voor grote waarden van $\bar{x}^2$ (indien $\bar{x} > 0$) ofwel voor grote positieve waarden van $\bar{x}$.

d. De toets "verwerp H_0 voor $\overline{X} \geq c$" is zuiver als $\beta(\mu) = P_\mu(\overline{X} \geq c) \geq \beta(0) = \alpha_0$ voor alle $\mu > 0$
Kansverdeling: $\overline{X} \cong N\left(\mu, \frac{1}{n}\right)$,
Dus bij gegeven $\alpha_0 < ½$ *geldt* $P_{\mu=0}(\overline{X} \geq c) = 1 - \Phi(c\sqrt{n}) = \alpha_0$ met kritieke waarde $c > 0$:
En voor μ > 0 geldt: $\beta(\mu) = P_\mu(\overline{X} \geq c) = 1 - \Phi\left((c-\mu)\sqrt{n}\right)$

$$c\sqrt{n} > (c-\mu)\sqrt{n} \;\Rightarrow\; \Phi(c\sqrt{n}) > \Phi\left((c-\mu)\sqrt{n}\right) \qquad \text{en dus } \alpha_0 < \beta(\mu)$$

Opgave 4

a. Het gaat om gepaarde waarnemingen en we voeren dus de één steekproef t-toets op de verschillen uit, aannemende dat de 15 gewichtsafnames (vóór –na) $X_1, .., X_{15}$ o.o.. en $N(\mu, \sigma^2)$-verdeeld zijn (μ is de verwachte gewichtsafname).
Standaardtoets: verwerp H_0: $\mu = 0$ verwerpen ten gunste van H_1: $\mu > 0$ indien $T = \frac{\overline{X}-0}{S/\sqrt{n}} \geq c$.
$T \cong T(14)$ onder H_0, dus $c = 1.35$, zodat $P(T(14) \geq c) = \alpha_0 = 10\%$.
Voor de berekende verschillen bepalen we $\bar{x} = 3$, s = 6.325 en $t = \frac{\overline{X}-0}{S/\sqrt{n}} = \frac{3}{6.325/\sqrt{15}} \approx 1.84$.
t ligt in het kritieke gebied dus H_0 verwerpen:
Het verwachte gewicht na de kuur is bij onbetrouwbaarheidsdrempel van 10% aantoonbaar verlaagd.

b. Parametervrij alternatief voor de toets onder a. is de tekentoets op de verschillen
Er zijn 6 negatieve, 8 positieve en 1 nul-verschil, dus waarneming $N^+ = 8$, waarin het aantal positieve verschillen N^+ $B(14, p)$-verdeeld is en p de kans op een positief verschil.
We toetsen H_0: $p = ½$ tegen H_1: $p > ½$ m.b.v. de overschrijdingskans:
$P_{p=½}(N^+ \geq 8) = 1 - P_{p=½}(N^+ \leq 7) = 39.53\% > \alpha_0 = 10\%$. Dus H_0 **niet** verwerpen.
(Dezelfde conclusie vinden we natuurlijk als we toetsen m.b.v. het kritieke gebied:
uit $P_{p=½}(N^+ \geq c) \leq 10\%$ volgt c = 10. We verwerpen H_0 dus niet omdat de waarneming x <10.)

Opgave 5

a. We kunnen hier geen parametrische toets en ook geen normale benadering (kleine n) toepassen .
Voor deze symmetrische verdeling geldt: $P(X > \mu) = P(X < \mu) = \frac{1}{2}$, dus de toets op H_0: $\mu = 2.37$ tegen H_1: $\mu > 2.37$ kan worden uitgevoerd met toetsingsgrootheid N = "het aantal waarnemingen > 2.37", die $B(10, p)$ verdeeld is. Onder H_0: $\mu = 2.37$ is $p = ½$ en onder H_1: $\mu > 2.37$ geldt $p > ½$.
Verwerp H_0 als N grote waarden aanneemt (rechtseenzijdig).
Waargenomen is $N = 7$, dus $P_{\mu=2.37}(N \geq 7) = 1 - P_{p=½}(N \leq 6) = 1 - 0.8281 = 17.19\% < \alpha_0 = 20\%$.
Dus H_0 verwerpen.

b. Voor het afleiden van een naar beneden begrensd interval met betrouwbaarheid 80% gebruiken we, analoog aan a, de rechtseenzijdige toets met:
H_0: $\mu = \mu_0$ tegen H_1: $\mu > \mu_0$, $\alpha_0 = 20\%$ en toetsingsgrootheid N = "aantal waarnemingen $> \mu_0$"
De 10 waarnemingen zijn (gerangschikt): 2.23, 2.31, 2.36, 2.42, 2.48, 2.54, 2.56, 2,61, 2.66, 2.69
80%-BI(μ) = { μ_0 | H_0: $\mu = \mu_0$ wordt **niet** verworpen ten gunste van H_1: $\mu > \mu_0$ met $\alpha_0 = 20\%$}
= { μ_0 | $P_{\mu=\mu_0}(N \geq n) > \alpha_0 = 20\%$}
= $[2.42, \infty)$
want $P_{p=½}(N \geq 7) = 1 - 0.8281 = 17.19\%$ (zie a) en $P_{p=½}(N \geq 6) = 1 - 0.6230 = 37.70\%$.
Er dienen er dus **6 of minder waarnemingen groter dan μ_0** te zijn: dus $\mu_0 \geq 2.42$