Tentamen Wiskundige Statistiek (191530382)
Vrijdag 4 november 2011 van 8.45-11.45 uur in SP2

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven. **De tabellen zijn separaat bijgevoegd.** Motiveer steeds uw antwoorden. Vermeld uw naam en studentnummer op het in te leveren werk.

1. Gegeven zijn de uitkomsten $x_1, \ldots, x_{25}$ van een aselecte steekproef uit een $N(\mu, \sigma^2)$-verdeling. Veronderstel dat $\sum_{i=1}^{25} x_i = 7.65$ en $\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 5.05$. Bepaal een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor σ^2 (neem als betrouwbaarheid $\gamma = 0.90$) :

   a. Als μ onbekend is;
   b. Als bovendien gegeven is dat $\mu = 0.315$.

2. Met behulp van een Geigerteller wordt de radioactiviteit van een stof gemeten: het aantal tikken in t minuten heeft een Poisson-verdeling.
   (Dus bij parameter λ geldt $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, terwijl verder $EX = var\ X = \lambda$).
   De verwachtingswaarde van het aantal tikken op de teller per minuut is A. Getoetst moet worden H_0: $A = 5$ tegen H_1: $A = 6$. Bereken het aantal minuten dat moet worden waargenomen, opdat de toets een onbetrouwbaarheid 0.025 en een onderscheidend vermogen 0.99 heeft.
   (Hint: gebruik een benadering voor grote steekproeflengte.)

3. Zij $X_1, \ldots., X_n$ een aselecte steekproef uit een $N(\mu, 1)$-verdeling.

   a. Leid de m.a. schatter van μ af en toon aan dat deze consistent is.
   b. Als we, voor $n = 1$, H_0: $\mu = 0$ willen toetsen tegen H_1: $\mu = 5$, leid dan m.b.v. het lemma van Neyman en Pearson de MP toets af bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 10\%$.
   c. Als we voor willekeurige steekproeflengte n willen toetsen H_0: $\mu = 0$ tegen H_1: $\mu > 0$, toon dan aan dat de toets die verwerpt voor grote waarden van het steekproefgemiddelde de aannemelijkheidsquotiënttoets is. (Het aannemelijkheidsquotiënt is
   $$\Lambda = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \prod_{i=1}^{n} g(x_i, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} \prod_{i=1}^{n} g(x_i, \theta)}).$$
   d. Bewijs dat de onder c. afgeleide toets zuiver is (neem aan dat $\alpha_0 < ½$).

Z.O.Z

4. Om het effect van een bepaalde vermageringskuur aan te tonen wordt van 15 proefpersonen het gewicht vóór en na de behandeling gemeten (afgerond op kilogrammen):

Vóór:	93	81	107	85	82	110	110	90	81	100	97	75	101	94	98
Na:	93	82	102	87	88	94	112	95	75	91	94	78	93	85	90

a. Neem aan dat de onderliggende verdelingen normaal zijn en toets de nulhypothese dat de kuur geen effect heeft tegen het alternatief dat deze wel gewicht verminderend werkt. Kies $\alpha_0 = 10\%$.
b. Herhaal a. als de normaliteitsaanname niet langer geldt.

5. Als uitkomst van een aselecte steekproef van een stochastische variabele X zijn de volgende 10 getallen gevonden:

2.31, 2.42, 2.69, 2.56, 2.23, 2.54, 2.48, 2.36, 2.66, 2.61.

De kansdichtheid van X is symmetrisch om het punt μ, d.w.z.:

$f_X(\mu + x) = f_X(\mu - x)$ voor alle reële x.

a. Toets bij onbetrouwbaarheidsdrempel 0.20 de hypothese $H_0 : \mu = 2.37$ tegen de alternatieve hypothese $H_1 : \mu > 2.37$.
b. Bepaal een naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval voor μ met betrouwbaarheid ten minste 0.80.

Normering:

1		2	3				4		5		**Totaal**
a	b		a	b	c	d	a	b	a	b	
3	2	4	3	3	3	2	4	3	3	2	**32**

Eindcijfer: $[1 + 9 \times \frac{totaal}{32}]$ (afgerond) + eventueel bonuspunt