Tentamen Complexe Functie Theorie

Vakcode 1520252

Donderdag 28 juni 2012, 08.45-11.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is niet toegestaan. Degenen die aan de huiswerkverplichtingen hebben voldaan, krijgen de punten van opgaven 6a en 7a cadeau.

1. (a) Los op voor $z \in \mathbb{C}$: $\tan z = 0$.

   (b) Geef de algemene oplossing $w(t)$ van $\frac{d^4w}{dt^4} + k^4 w = 0$ met reëele $k > 0$. (*Hint:* substitueer $w = e^{zt}$ voor complexe z.)

   [Score : 2+3=5]

2. Gegeven een analytische functie $f(z = x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

   (a) Bereken $f(z)$ in termen van z als gegeven is dat $u(x, y) = y/(x^2+y^2)$ en $f(i) = 1+i$.

   (b) Bepaal alle $f(z)$ waarvoor geldt $\partial u/\partial y \leq 0$. (*Aanwijzing:* bepaal eerst $f'(z)$.)

   [Score : 3+2=5]

3. Gegeven de functie $f(z) = \frac{-(2+i)}{(z-2)(z+i)}$, bepaal de Laurent-reeks in elk van de volgende gebieden

   (a) $|z| < 1$;

   (b) $1 < |z| < 2$;

   (c) $|z| > 2$.

   [Score : 2+2+2=6]

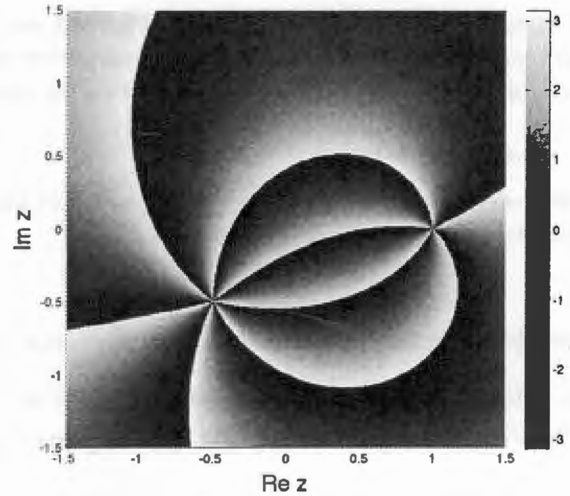
4. Gegeven de functie $f(z) = (z^2 + 1)/z^3$.

   (a) Bereken met behulp van de residurenstelling $\int_{C_1} f(z)dz$, waarbij C_1 de positief geörienteerde cirkel met middelpunt 0 en straal 1 is door de singuliere punten binnen C_1 te sluiten.

   (b) Bereken met behulp van de residurenstelling $\int_{C_1} f(z)dz$, waarbij C_1 de positief geörienteerde cirkel met middelpunt 0 en straal 1 is door de singuliere punten buiten C_1 te sluiten, maar het punt in oneindig mee te nemen (hint: gebruik $z = 1/w$.

   (c) Verklaar je resultaten.

   [Score : 2+2+1=5]



5. (a) Gebruik de Laplace transformatie om het volgende beginwaardenprobleem op te lossen:

$$\frac{d^2f}{dt^2} - \frac{df}{dt} - 2f = e^{-t}\sin 2t$$

met $f(0) = 0$ en $f'(0) = 2$.

[Score : 5]

6. (a) Laat zien dat de bilineaire Möbius transformatie $T(z)$ een groep vormt, d.w.z. een inverse heeft en het "product" ook weer een bilineaire transformatie is.
   (b) Zoek welke gebied in het z-vlak overeenkomt met het beeld $3\pi/4 \leq arg\, w \leq 5\pi/4$ onder de afbeelding $w = z/(z-(1+i))$.

[Score : 2+3=5]

7. (a) Formuleer het Principe van het Argument (inclusief voorwaarden).
   (b) Wat is de aard van de singulariteiten en nulpunten in bijgaande figuur, waarin de fase $f(z)/|f(z)|$ van een meromorphische functie $f(z)$ is weergegeven in grijstinten (geordend van zwart, grijs, naar wit —zie de grijsschaal) op domein D.

[Score : 2+3=5]

Totaal: 36+4=40 punten