Voorbeeldtentamen Grafentheorie (152075)
Studiejaar 2007-2008

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
In dit tentamen wordt met een graaf G steeds een gewone graaf bedoeld (*simple graph*), d.w.z. G heeft geen lussen (*loops*) en twee verschillende punten worden hoogstens door één lijn verbonden.

1. [4 pt] G is een graaf met $\nu \geq 6$. Toon aan dat G of G^c een K_3 als deelgraaf bevat.

2. [4 pt] Laat $e \in E(K_n)$. Toon aan dat $\tau(K_n - e) = (n-2)n^{n-3}$.

3. [5 pt] G is een graaf met $\kappa(G) = 2$. $\{u, v\}$ is een puntsnede (*vertex cut*) van G.
Toon aan dat als $uv \in E(G)$, dan geldt ook $\kappa(G - uv) = 2$.

4. [4 pt] G is een graaf met $\nu \geq 4$. Toon aan dat als elk tweetal punten van G is verbonden door een Hamiltonpad, dan geldt: $\varepsilon \geq \lfloor \frac{1}{2}(3\nu + 1) \rfloor$.
Opm.: $\lfloor x \rfloor$ is de onder-entier (*floor*) van x, d.w.z. het grootste gehele getal dat kleiner of gelijk is aan x.

5. [5 pt] Toon aan dat een boom $T = (V, E)$ een perfecte matching heeft
dan en slechts dan als voor elke $v \in V$ geldt: $o(T - v) = 1$.

6. [5 pt] G is een reguliere graaf.
Toon aan dat als G een snijpunt (*cut vertex*) heeft, dan geldt: $\chi' = \Delta + 1$.

7. [4 pt] Bewijs de volgende stelling uit het boek:
als G k-kritiek (*k-critical*) is, dan geldt: $\delta \geq k - 1$.

8. N is een netwerk met bron (*source*) x en put (*sink*) y.
Een stroom (*flow*) in N heet acyclisch als N geen gerichte cykel C heeft zo dat $f(a) > 0$ voor elke pijl (*arc*) $a \in A(C)$.

   (a) [2 pt] Toon aan dat N een grootste stroom heeft die acyclisch is.

   (b) [3 pt] Bewijs dat, als f een acyclische grootste stroom is in N,
   dan geldt: $f^-(x) = f^+(y) = 0$.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten