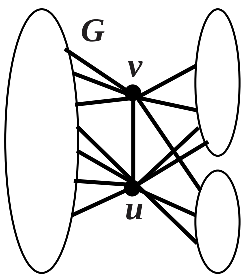
Uitwerkingen Voorbeeldentamen Grafentheorie (152075)
Studiejaar 2007-2008

1. Neem een $v \in V$ met $d_G(v) \geq 3$ (als zo'n *v* niet bestaat, dan $d_G(v) \leq 2$ voor alle $v \in V$ en dus $d_{G^c}(v) \geq 3$ voor alle $v \in V$ (want $\upsilon \geq 6$); de redenering verloopt dan analoog door de rollen van *G* en G^c te verwisselen).
Laat *p*, *q* en *r* drie verschillende buren zijn van *v* in *G*.
Dan geldt: als $pq \in E(G)$ of $pr \in E(G)$ of $qr \in E(G)$, dan bevat *G* een deelgraaf die isomorf is met K_3, namelijk: de driehoek *vpq* of *vpr* of *vqr*.
Als $pq \notin E(G)$ en $pr \notin E(G)$ en $qr \notin E(G)$, dan bevat G^c een deelgraaf die isomorf is met K_3, namelijk: de driehoek *pqr*.

2. (Zie werkcollege opgave 2.4.4)
Laat $e \in E(K_n)$. Laat *A* het aantal opspannende bomen zijn in K_n die lijn *e* niet gebruiken en *B* het aantal opspannende bomen in K_n die lijn *e* wel gebruiken (we willen aantonen dat $A = (n-2)n^{n-3}$).
Volgens de formule van Cayley geldt: $A + B = \tau(K_n) = n^{n-2}$.
Deze vergelijking geldt natuurlijk voor elke $e \in E(K_n)$, dus als we sommeren over alle $\frac{n(n-1)}{2}$ lijnen in K_n krijgen we: $\frac{n(n-1)}{2}A + \frac{n(n-1)}{2}B = \frac{n(n-1)}{2}n^{n-2} \quad (1)$.
Elke opspannende boom *T* van K_n wordt in de term $\frac{n(n-1)}{2}B$ precies $n-1$ maal geteld, namelijk één keer voor elke $e \in E(T)$.
Volgens de formule van Cayley geldt dan: $\frac{n(n-1)}{2}B = (n-1)n^{n-2}$.
Invullen in (1) geeft: $\frac{n(n-1)}{2}A + (n-1)n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}n^{n-2}$.
Omschrijven geeft dan: $A = (n-2)n^{n-3}$.

3. Natuurlijk geldt $\kappa(G-uv) \leq 2$, want $\kappa(G) = 2$. Nog aantonen dat ook $\kappa(G-uv) \geq 2$, ofwel dat $G-uv$ 2-samenhangend is. Volgens de stelling van Whitney is dit equivalent met aantonen dat elk tweetal punten in $G-uv$ verbonden is door (minstens) twee onafhankelijke paden. Laat $x, y \in V(G-uv)$. We onderscheiden het geval dat *x* en *y* tot verschillende componenten van $G-\{u,v\}$ behoren en het geval dat *x* en *y* tot dezelfde component van $G-\{u,v\}$ behoren (zie

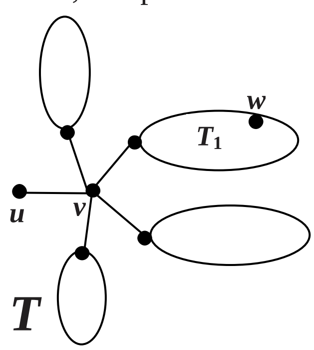


plaatje). De situaties $x = u$ en $y \neq v$ (of $y = u$ en $x \neq v$) en $x = v$ en $y \neq u$ (of $y = v$ en $x \neq u$) gaan analoog aan Geval 2. Voor de situatie $x = u$ en $y = v$ (of $y = u$ en $x = v$) gebruiken we het feit dat er voor elke component *K* in $G-\{u,v\}$ een (*u*,*v*)-pad in *G* bestaat waarvan alle tussenpunten in *K* liggen (anders zou {*u*} (en {v}) een 1-puntsnede zijn van *G* en zou dus $\kappa(G) \leq 1$). Omdat $G-\{u,v\}$ minstens twee componenten heeft, zijn er dus minstens twee onafhankelijke (*u*,*v*)-paden in $G-uv$.
<u>Geval 1</u>: *x* en *y* behoren tot verschillende componenten van $G-\{u,v\}$. Omdat $\kappa(G) = 2$, is *G* 2-samenhangend en volgens Whitney zijn er dan in *G* twee onafhankelijke (*x*,*y*)-paden. Geen van beide paden gebruikt de lijn *uv*, want anders zou het andere pad noch punt *u* noch punt *v* bevatten,

en dat kan niet want als *x* en *y* tot verschillende componenten van $G-\{u,v\}$ behoren loopt elk (*x*,*y*)-pad via *u* of *v* (want {*u*,*v*} is een puntsnede). Dus beide paden liggen ook in $G-uv$.
<u>Geval 2</u>: *x* en *y* behoren tot dezelfde component *K* van $G-\{u,v\}$. Laat *P* en *Q* twee onafhankelijke (*x*,*y*)-paden zijn in *G* (zie Geval 1). Als geen van beide paden de lijn *uv* gebruikt zijn *P* en *Q* ook twee onafhankelijke (*x*,*y*)-paden in $G-uv$. Als *uv* op *P* (of *Q*) ligt, verwijder dan lijn *uv* uit *P* en verbindt *u* en *v* dan weer door een pad waarvan de tussenpunten in een andere component dan *K* liggen (zie opmerking boven Geval 1 bij *x* = *u* en *y* = *v*). Dit geeft dan een (*x*,*y*)-pad in $G-uv$ dat onafhankelijk is van *Q*.

4. Er geldt: $d(v)\geq 3$ voor alle $v\in V$, want als voor een punt *v* geldt $d(v)=1$, dan bestaat er geen Hamiltonpad in *G* van *v* naar zijn (unieke) buur (want $\upsilon\geq 4$) en als $d(v)=2$ en *u* en *w* zijn de buren van *v*, dan bestaat er geen Hamiltonpad in *G* van *u* naar *w* (want als *v* op zo'n pad ligt, dan bestaat het pad uitsluitend uit de punten *u*, *v* en *w* en kunnen de overige punten ($\upsilon\geq 4$) er niet op liggen).
Als υ even is dan zouden alle punten graad 3 kunnen hebben en dan geldt:
$\varepsilon=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}d(v)\geq\frac{3\upsilon}{2}=\left\lfloor\frac{3\upsilon+1}{2}\right\rfloor$.
Als υ oneven is dan moet *G* minimaal één punt van graad 4 hebben. Dus dan geldt:
$\varepsilon=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}d(v)\geq\frac{3(\upsilon-1)+4}{2}=\frac{3\upsilon+1}{2}=\left\lfloor\frac{3\upsilon+1}{2}\right\rfloor$.
In alle gevallen geldt dus $\varepsilon\geq\left\lfloor\frac{3\upsilon+1}{2}\right\rfloor$.

5. (Zie werkcollege opgave 5.3.3)
"$\Rightarrow$": Stel boom *T* heeft een perfecte matching. Laat $v\in V$. Volgens de stelling van Tutte geldt dan: $o(T-v)\leq|\{v\}|=1$. Ook geldt $o(T-v)\geq 1$, want υ is even (want *T* heeft een perfecte matching) en dus is $|V(T-v)|$ oneven; dus $T-v$ heeft minstens één oneven component.
Dus $o(T-v)\leq 1$ en $o(T-v)\geq 1$, dus $o(T-v)=1$.
"$\Leftarrow$": Stel *T* is een boom en $o(T-v)=1$ voor alle $v\in V$. Dan is υ even (want $T-v$ heeft precies één oneven component). Laat $\upsilon=2k$ ($k\in Z^+$). We bewijzen met mathematische inductie naar *k* dat *T* een perfecte matching heeft.
Inductiebasis voor *k* = 1: dan geldt: $T=K_2$, en deze heeft een perfecte matching.
<u>Inductieveronderstelling</u>: Laat $k\geq 1$ en stel dat elke boom *T* met $\upsilon\leq 2k$ en $o(T-v)=1$ voor alle $v\in V$, een perfecte matching heeft.



Laat *T* nu een boom zijn met $\upsilon=2(k+1)$ en $o(T-v)=1$ voor alle $v\in V$. We moeten laten zien dat *T* dan ook een perfecte matching heeft. (zie plaatje)
Neem $u\in V(T)$ met $d(u)=1$ (zo'n *u* bestaat, want *T* is een boom). Laat *v* de unieke buur zijn van *u*. De graaf $T-\{u,v\}$ heeft 2*k* punten $d(v)-1$ componenten. Neem een component T_1 van $T-\{u,v\}$. We laten zien dat we de inductieveronderstelling mogen toepassen op T_1. Duidelijk is dat $|V(T_1)|\leq 2k$. Nog aantonen dat $o(T_1-w)=1$ voor alle $w\in V(T_1)$. Merk eerst op dat $|V(T_1)|$ even is, want $o(T-v)=1$, dus $\{u\}$ is de enige oneven component van $T-v$, dus $T-\{u,v\}$ heeft geen oneven componenten. Laat nu $w\in V(T_1)$. Dan geldt $o(T_1-w)\geq 1$, want $|V(T_1-w)|$ is oneven. Ook geldt: $o(T_1-w)\leq 1$, want als $o(T_1-w)>1$,

dan $o(T_1 - w) \geq 3$ (want $o(T_1 - w)$ moet oneven zijn omdat $|V(T_1 - w)|$ oneven is), en dan is $o(T - w) \geq 2$ (zie plaatje: de componenten van $T - w$ zijn dezelfde als die van $T_1 - w$; op eén component na (nl. de component van $T - w$ die punt v bevat)), en dat is in tegenspraak met de aanname dat $o(T - v) = 1$ voor alle $v \in V$. Dus $o(T_1 - w) \geq 1$ en $o(T_1 - w) \leq 1$, dus $o(T_1 - w) = 1$. Dus we mogen de inductieveronderstelling toepassen op T_1. T_1 heeft dus een perfecte matching. Hetzelfde geldt voor de andere componenten van $T - \{u, v\}$. Al deze matchings vormen dan, samen met de lijn *uv*, een perfecte matching van *T* (zie plaatje).

6. Stel *G* is *k*-regulier en stel dat $\chi' \neq \Delta + 1$ (we zullen hieruit een tegenspraak afleiden). Volgens de stelling van Vizing moet dan $\chi' = \Delta$. Omdat *G* *k*-regulier is, geldt $\Delta = k$, dus *G* moet dan een (echte) *k*-lijnkleuring $\mathscr{C}$ hebben. In $\mathscr{C}$ wordt elke kleur dan bij elk punt gerepresenteerd (omdat *G* *k*-regulier is), dus voor elke kleur vormen de lijnen van die kleur een perfecte matching in *G*. Dit betekent dat υ even moet zijn. Laat *v* nu een snijpunt zijn van *G*. Dan is $\upsilon(G - v)$ dus oneven, dus $G - v$ heeft minstens één oneven component *K*. *K* heeft geen perfecte matching (want oneven aantal punten). Dus in *G* moet er van èlke kleur van $\mathscr{C}$ een lijn van *v* naar (een punt in) *K* lopen. Maar dan is $d(v) \geq k = \Delta$ en dus $d(v) > \Delta$ (want er loopt in *G* ook minstens één lijn van *v* naar een andere component van $G - v$, want *v* is een snijpunt van *G* (dus $G - v$ heeft minstens twee componenten). Tegenspraak, want is Δ de grootste graad in G. Dus $\chi' = \Delta + 1$.

7. Zie Stelling 8.1 uit het boek.
Stel dat *G* *k*-kritiek is en stel dat $\delta < k - 1$. Neem $v \in V$ met $d(v) = \delta$. Omdat *G* *k*-kritiek is, is $G - v$ $(k-1)$-kleurbaar. Laat $(V_1, V_2, \ldots, V_{k-1})$ een $(k-1)$-kleuring zijn van $G - v$. Omdat $d(v) = \delta$ heeft *v* in *G* precies δ buren en omdat $\delta < k - 1$ moet er dus een $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ zijn waarvoor V_i geen buur van *v* bevat. Maar dan is $(V_1, V_2, \ldots, V_i \cup \{v\}, \ldots, V_{k-1})$ een $(k-1)$-kleuring van *G*. Tegenspraak, want *G* is *k*-kritiek (en dus ook *k*-chromatisch). Dus $\delta \geq k - 1$.

8. a. Laat *f* een grootste stroom zijn in *N* (*f* bestaat want is m.b.v. het labelingsalgoritme van F&F te construeren). Stel dat *N* een gerichte cykel *C* bevat waarvoor $f(a) > 0$ voor alle $a \in A(C)$.
Laat $m = \min\{f(a) \mid a \in A(C)\}$ en laat *f '* de stroom zijn in *N* gedefinieerd door:

$$f'(a) = \begin{cases} f(a) - m & \text{als} \quad a \in A(C) \\ f(a) & \text{als} \quad a \notin A(C) \end{cases}$$

Dan geldt $val(f') = (f')^+(x) - (f')^-(x) = f^+(x) - f^-(x) = val(f)$. Dus *f '* is ook een maximale stroom in *N* en *f '* heeft één cyclische stroom minder dan *f* (want *C* bevat nu geen cyclische stroom meer). Zo doorgaand kunnen we stap voor stap alle cyclische stromen verwijderen (want het aantal cyclische stromen is eindig) en krijgen we uiteindelijk een acyclische maximale stroom.

b. Stel $f^-(x) > 0$. Laat *P* een gericht pad zijn in *N*, eindigend in *x*, zo dat $f(a) > 0$ voor alle $a \in A(P)$. Neem *P* zo lang mogelijk. Omdat *f* acyclisch is, moet *P* dus in *y* beginnen (want de overige punten zijn “doorstroompunten” dus als zo’n punt op *P* ligt is *P* daar altijd te verlengen). Maar dan is *P* een *f*-vergrotend pad en is *f* dus niet maximaal. Tegenspraak, dus $f^-(x) = 0$. Op analoge wijze leidt men een tegenspraak af uit de veronderstelling $f^+(y) > 0$. Dus ook $f^+(y) = 0$.