Herkansing Lineaire Structuren II, 201300057

Datum	:	28 januari 2016
Plaats	:	Therm
Tijd	:	8.45 – 11.45
Module-coordinator	:	B. Manthey
Docent	:	H. Zwart

Alle antwoorden moeten gemotiveerd worden.
Een rekenmachine, boek, formuleblad, e.d. mogen niet gebruikt worden.

1. Gegeven is lineaire ruimte V die wordt opgespannen door de functies $\{1, x, e^{2x}, xe^{2x}\}$. De lineaire afbeelding T op deze ruimte is de tweede afgeleide, dus

$$T(f) = \frac{d^2f}{dx^2}.$$

   (a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T.

   (b) Is T diagonaliseerbaar?

2. Zij V een zeventien dimensionale lineaire ruimte, en zij T een lineaire afbeeelding van V naar V. Het karakteristieke polynoom van T is gegeven door

$$f(t) = -t^{17} + a_{16}t^{16} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

   (a) Bewijs dat T inverteerbaar is dan en slechts dan als $a_0 \neq 0$.

   (b) Bewijs dat als T inverteerbaar is, dan

$$T^{-1} = \frac{-1}{a_0}\left[-T^{16} + a_{16}T^{15} + \cdots + a_2 T + a_1 I\right].$$

3. Gegeven is de (complexe) lineaire ruimte V opgespannen door $\{x^2, x^4, x^6, x^8, x^{10}\}$. Op deze ruimte definiëren we het inproduct.

$$\langle f, g\rangle_1 = f(1)\overline{g(1)} + \int_0^2 \frac{df}{dx}(x)\overline{\frac{dg}{dx}(x)}dx, \tag{1}$$

waarbij $\frac{df}{dx}(x)$ de afgeleide is van $f(x)$, soortgelijk voor g.

   (a) Toon aan dat (1) een inproduct is op V.

   (b) Zij W de lineaire deelruimte opgespannen door $\{x^2\}$. Bepaal de orthogonale projectie van $f(x) = x^4$ op W, m.b.t. het inproduct (1)

   (c) Is

$$\langle f, g\rangle_2 = g(1)\overline{f(1)} + \int_0^2 \frac{dg}{dx}(x)\overline{\frac{df}{dx}(x)}dx,$$

   een inproduct op V?

4. Gegeven is een complexe inproduct ruimte V. Zij Q een normale afbeelding van V naar V.

   (a) Bewijs dat voor alle $z \in \mathbb{C}$ de afbeelding $Q + zI$ normaal is.

   (b) Bewijs dat voor all $v \in V$ geldt dat $\|Q(v)\| = \|Q^*(v)\|$.

   (c) Bewijs dat als $w \in V$ een eigenvector is van Q het ook een eigenvector van Q^* is.

5. Gegeven is een complexe inproduct ruimte V. Zij T een lineaire afbeelding van V naar V die voldoet aan

$$T^* = -T.$$

   Bewijs dat alle eigenwaarden van T op de imaginaire as liggen.

6. Voor $n > 1$ is gegeven de (complexe) lineaire ruimte, $\mathbb{C}^n$. Op deze ruimte definiëren we de volgende afbeelding

$$S(x) = (x_2, x_3, \cdots, x_n, x_1). \tag{2}$$

   (a) Neem $n = 2$ en bewijs dat S zelf-geadjundeerd is op $\mathbb{C}^2$ met het standaard inproduct.

   (b) Neem $n = 3$ en bewijs dat S niet zelf-geadjundeerd is op $\mathbb{C}^3$ met het standaard inproduct.

   (c) Bestaat er een inproduct op $\mathbb{C}^3$ zodanig dat S zelf-geadjungeerd is ten opzichte van dit (nieuwe) inproduct?

Puntenverdeling[1]

Som 1		Som 2		Som 3		Som 4		Som 5	Som 6	
a	7	a	5	a	6	a	5	6	a	5
b	4	b	5	b	5	b	4		b	5
				c	4	c	6		c	5

[1]Totaal is 80. U krijgt 8 punten gratis