Reparatietoets Lineaire Structuren II, Vakcode 201300057.

Datum	:	30 januari 2014
Plaats	:	SP-3
Tijd	:	08.45 – 11.45

Alle antwoorden moeten gemotiveerd worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Zij $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(t) = a + be^t + ce^{2t}, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ en definieer daarop de lineaire afbeelding $T : V \to V$

$$(T(p))(t) = p^{(2)}(t) + p(0).$$

Hier betekent $p^{(2)}$ de tweede afgeleide van p.

   (a) Bepaal de karakteristieke polynoom van T.

   (b) Bepaal alle eigenvectoren van T.

   (c) Is T diagonaliseerbaar?

2. Beschouw de ruimte $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ van reële polynomen van graad 2 of lager met daarop het (kandidaat) inproduct

$$\langle f, g \rangle = \alpha f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\, dt.$$

Hierbij is f' de afgeleide van f.

Voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ is dit inderdaad een inproduct op $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$?

3. Zij A en B twee $n \times n$ matrices. A en B heten simultaan diagonaliseerbaar als er een inverteerbare $n \times n$ matrix Q bestaat zodanig dat $Q^{-1}AQ$ en $Q^{-1}BQ$ beide diagonaal matrices zijn.

   (a) Bewijs dat als A en B simultaan diagonaliseerbaar zijn, dat dan A en B commuteren, d.w.z. $AB = BA$.

   (b) Bewijs dat als A en B simultaan diagonaliseerbaar zijn en v is een eigenvector van A, dat v dan ook een eigenvector is van B.

   (c) Bewijs dat als A en B commuteren, dat ze dan simultaan diagonaliseerbaar zijn.
   als A diagonaliseerbaar

Z.O.Z.

4. Zij Q een $n \times n$ (complexe) matrix. Toon aan dat Q unitair is dan en slechts dan als de kolommen van Q een orthonormale basis van $\mathbb{C}^n$ vormen.

5. Zij $\mathbb{P}_9([-1,1])$ de complexe vectorruimte van polynomen $p : [-1,1] \to \mathbb{C}$ van graad 9 of lager. Op de ruimte $\cancel{V}$ P_9 hebben we het (standaard) inproduct

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Zij W de lineaire deelruimte van $\mathbb{P}_9([-1,1])$ opgespannen door de polynomen met even graad. Dus W is het opspansel van $\{1, t^2, t^4, t^6, t^8\}$.

   (a) Toon aan dat t^3 loodrecht staat op W.

   (b) Bepaal, voor bovenstaand inproduct, de beste benadering in W van de derdegraads polynoom t^3.

6. Zij $\mathbb{P}_9([-1,1])$ en W zoals gegeven in opgave 5. Beschouw $T : \mathbb{P}_9([-1,1]) \to \mathbb{P}_9([-1,1])$ gedefinieerd als

$$(T(f))(t) = 3 \cdot f(-t) - 3 \cdot f(t), \qquad t \in [-1,1].$$

   (a) Toon aan dat W gelijk is aan de kern van T.

   (b) Is T een unitaire afbeelding?

   (c) Is T een normale afbeelding?

   (d) Heeft $\mathbb{P}_9([-1,1])$ een orthonormale basis van eigenvectoren van T?

Puntenverdeling[1]

Som 1		Som 2	Som 3		Som 4	Som 5		Som 6	
a	6	7	a	6	8	a	6	a	6
b	7		b	7		b	8	b	6
c	6		c	6				c	6
								d	5

[1]Totaal is 100. U krijgt 10 punten gratis