

Course : Mathematics β_1 .
Date : October 10, 2014.
Time : 13:45 – 15:45.

Motivate all your answers.

The use of electronic devices is not allowed

1.) The complex number z is defined as

$$z = \frac{1}{1 - \sqrt{3}i}$$

(a) (2pt) Find the real and imaginary part of z .

(b) (2pt) Find the modulus (absolute value) and the argument of z^9 .

2.) (3pt) Compute the integral:

$$J(t) = \int_1^t s^2 \ln s \, ds$$

3.) (3.5pt) Compute the general solution $u(t)$ for the differential equation:

$$u'' + \frac{6}{5}u' + u = \sin t$$

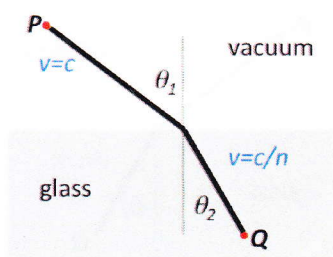
4.) (3pt) Compute the solution $y(x)$ of the following initial value problem:

$$y' = xe^{x^2+y}, \quad y(0) = 0$$

5.) (4.5pt) Compute the general solution $u(x)$ for the differential equation:

$$u'' + u' - 2u = e^{-2x}.$$

6.) (4pt)



Nature optimizes! Light travels through vacuum with the speed of light, usually denoted with c , which is around 300000 km/s. When light travels through a material, say glass, it travels with a velocity lower than c , i.e.,

$$v = \frac{c}{n}, \quad n > 1,$$

where n is called the index of refraction of that material.

Now consider light travelling from P to Q , see Figure: the speed of light is c in the upper part, and c/n in the grey lower part. What is the fastest way to get in Q , starting from point P ? Deduce a relation between angles θ_1 and θ_2 .

Total: 22 points

Toets : **Math β_1** .
Datum : 10 oktober, 2014.
Tijd : 13:45 – 15:45.

Motiveer al uw antwoorden.

Het gebruik van elektronische apparatuur is niet toegestaan.

- 1.) Het complexe getal z is gedefinieerd als

$$z = \frac{1}{1 - \sqrt{3}i}$$

(a) (2pt) Vind het reële en imaginair deel van z .

(b) (2pt) Vind de modulus (absolute waarde) en het argument van z^9 .

- 2.) (3pt) Bereken de integraal:

$$J(t) = \int_1^t s^2 \ln s \, ds$$

- 3.) (3.5pt) Bepaal de algemene oplossing $u(t)$ van de differentiaalvergelijking:

$$u'' + \frac{6}{5}u' + u = \sin t$$

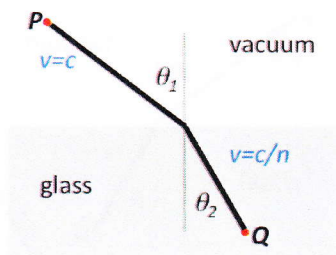
- 4.) (3pt) Bereken de oplossing $y(x)$ van het volgende beginwaardeprobleem:

$$y' = xe^{x^2+y}, \quad y(0) = 0$$

- 5.) (4.5pt) Bepaal de algemene oplossing $u(x)$ van de differentiaalvergelijking:

$$u'' + u' - 2u = e^{-2x}.$$

- 6.) (4pt)



De natuur optimaliseert! Licht beweegt in vacuüm met de lichtsnelheid, meestal genoteerd als c , met een waarde van ongeveer 300000 km/s. Wanneer licht door een ander medium beweegt, bijvoorbeeld glas, gaat het langzamer dan de lichtsnelheid, dat wil zeggen:

$$v = \frac{c}{n}, \quad n > 1,$$

Hier wordt n de brekingsindex genoemd.

We bekijken nu licht dat gaat van P naar Q , zie de Figuur: snelheid van het licht is c in het bovenste gedeelte en c/n in het grijze onderste gedeelte. Wat is de snelste om in Q te komen, startend in punt P ? Leid een relatie af tussen de hoeken θ_1 en θ_2 .

Total: 22 points