Tentamen Vectorcalculus voor TN/TW

vakcodes 201300164, 201400535

20 mei 2016

- **Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.**
- **Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.**

1a. Bepaal de vergelijking voor het vlak dat door het punt $(-1, 2, 3)$ gaat en parallel is met het vlak $S_1 : 2x + 4y - z = 6$.

1b. Bepaal de kortste afstand van het punt $(2, 6, 3)$ naar het vlak $S_2 : -3x + 2y + z = 23$.

2a. Gegeven $z = \exp(x^2 + 2y)$ met $x = \cos t \sin s$ en $y = \sqrt{s^2 + \sin t}$.

Bereken $\frac{\partial z}{\partial s}$ en $\frac{\partial z}{\partial t}$.

2b. Gegeven de functie

$$f(x, y, z) = \sin(\sqrt{x^2 + z}) - \frac{1}{y + z}$$

Bereken $\frac{\partial z}{\partial x}$ voor $f(x, y, z) = 0$.

2c. Gegeven de functie $f(x, y) = \ln(x^2 + y^4)$.

Bereken de Taylorreeks van de graad 2 (dus tot en met de kwadratische termen) van $f(x, y)$ rond het punt $(1, 1)$.

3. Het domein D wordt begrensd door de krommen:

$$K_1 : x^3 + xy = 8, \quad K_2 : y - 7x^2 = 0 \quad \text{en} \quad K_3 : y = 0.$$

Gegeven de integraal:

$$I = \iint_D \frac{y}{x^2} dxdy.$$

a. Schets het domein D in het xy-vlak.

b. Gegeven de transformatie naar u, v-variabelen:

$$u = x^3 + xy,$$
$$v = \frac{y}{x^2}.$$

Wat is het domein R in het uv-vlak dat correspondeert met het domein D in het xy-vlak onder deze transformatie?

c. Transformeer de integraal I naar u, v-variabelen en bereken deze integraal.

4. Gegeven het kegeloppervlak

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = \sqrt{x^2 + z^2}, \ 0 \leq y < 1\}$$

en het vectorveld

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}.$$

De y-component van de normaalvector $\mathbf{n}$ op het kegeloppervlak S is negatief ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} < 0$).

a. Bereken $\operatorname{curl} \mathbf{F}$.

b. Bereken $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$ met behulp van de Stelling van Stokes. De vector $\hat{\mathbf{N}}$ is eenheidsnormaal vector op S.

c. Bereken $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$ direct, zonder gebruik van de Stelling van Stokes.

5. Bereken de maximum en minimum waarden van

$$f(x, y) = x^2 - 4y^3$$

met behulp van de methode van Lagrange op

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 2y^2 = 8\}.$$

6. Onderzoek of de volgende reeksen convergeren of divergeren

$$a. \ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(k+1)}\right)^k, \qquad b. \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k^2+1}}{\sqrt{k^3+2}}, \qquad c. \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{k 3^{k+1} k!}.$$

Puntentelling

1: 4	2: 6	3: 6	4: 7	5: 5	6: 5
1a: 1	2a: 1	3a: 1	4a: 1		6a: 1
1b: 3	2b: 2	3b: 1	4b: 3		6b: 2
	2c: 3	3c: 4	4c: 3		6c: 2

totaal 33+3=36 punten