Tentamen Vectorcalculus voor TN/TW

vakcodes 201300164, 201400535

20 juni 2016, 8.45-11.45

- **Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.**
- **Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.**

1a. Gegeven het vlak $S : x + y + z = 6$. Gegeven de punten $P : (1, 0, 1)$ en $Q : (4, -2, 2)$. In welk punt snijdt de rechte lijn door de punten P en Q het vlak S?

1b. Gegeven de ruimtelijke kromme met parametrizatie

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \ln(\cos t)\,\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/3.$$

Bereken de eenheidsraakvector $\mathbf{T}(t)$ aan $\mathbf{r}(t)$ voor $t = \pi/4$.

1c. Bereken de cosinus van de hoek tussen de raakvector $\mathbf{T}(\pi/4)$ en de vector $\mathbf{R} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

2a. Gegeven $z = \sin(x^2 + y^2)$ met $x = s^2/t$ en $y = s \ln t$. Bereken $\frac{\partial z}{\partial s}$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}$. Gebruik de kettingregel zonder substitutie van de variabelen x, y als functie van s, t.

2b. Gegeven de functie

$$f(x, y, z) = \exp\left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right) - \ln(x + 2y + 3z)$$

Bereken $\frac{\partial y}{\partial z}$ voor $f(x, y, z) = 0$.

2c. Gegeven de functie $f(x, y) = \exp(\sin(x + 2y))$.

Bereken de Taylorreeks van de graad 2 (dus tot en met de kwadratische termen) van $f(x, y)$ rond het punt $(\pi, 0)$.

3. Gegeven het domein $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + 4y^2 \leq 1 \text{ en } 0 \leq y \leq x\}$. Gegeven de integraal:

$$I = \iint_D \frac{y \sin(9x^2 + 4y^2)}{x} dA.$$

3a. Schets het domein D in het xy-vlak.

3b. Gegeven de transformatie naar r, θ-variabelen:

$$x = ar\cos\theta \quad y = br\sin\theta,$$

met geschikt gekozen constanten a en b.

Wat is het domein R in het r, θ-vlak dat correspondeert met het domein D in het xy-vlak onder deze transformatie? Motiveer hoe je de constanten a en b bepaalt.

Z.O.Z

3c. Transformeer de integraal I naar r, θ-variabelen en bereken deze integraal.

4. Gegeven in $\mathbb{R}^3$ een kegel met oppervlak $S = S_1 \cup S_2$, met

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; y = \sqrt{x^2+z^2},\; 0 \leq y \leq 1\},$$
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2+z^2 \leq 1,\; y = 1\}$$

en het vectorveld

$$\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{k}.$$

a. Bereken $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$ met behulp van de Stelling van Gauss. De vector $\hat{\mathbf{N}}$ is de uitwendige eenheidsnormaal vector op S.

b. Bereken $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$ met behulp van een parametrisatie van het oppervlak S.

5. Bereken de maximum en minimum waarden van

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

met behulp van de methode van Lagrange op

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 3\}.$$

6. Gegeven de machtreeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k (x+3)^k}{3^{k+1}(2k^2+1)}$$

a. Bepaal de convergentiestraal van de reeks.

b. Onderzoek of de machtreeks convergeert aan de eindpunten van het convergentieinterval.

Puntentelling

1: 4	2: 6	3: 6	4: 6	5: 4	6: 6
1a: 1	2a: 2	3a: 1	4a: 3		6a: 3
1b: 2	2b: 2	3b: 1	4b: 3		6b: 3
1c: 1	2c: 2	3c: 4			

totaal 32+3=35 punten