Kenmerk:
Datum: 6 april 2015

Tweede deeltoets Kansrekening
(Module Signalen en Onzekerheid, 201300182)

Woensdag 8 april 2015 van 8.45 - 11.15 uur

Deze toets bestaat uit 4 opgaven.
Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd.
Gebruik van een rekenmachine is *niet* toegestaan.

1. We trekken 100 keer aselect een getal uit de verzameling $\{1, 2, \ldots, 20\}$. Zij X het aantal malen dat we een 1 hebben getrokken.

   a. Geef met behulp van de centrale limietstelling een benadering voor de kans $P(X > 3)$, in termen van de standaardnormale verdelingsfunctie Φ. Pas daarbij een continuïteitscorrectie toe.

   Neem nu aan dat we net zolang aselect een getal uit $\{1, 2, \ldots, 20\}$ kiezen (met terugleggen) totdat we een 1 trekken.

   b. Bepaal het verwachte aantal trekkingen door te conditioneren op de uitkomst van de eerste trekking. (Bepaal zelf geschikte notatie.)

2. Het aantal verkeersongelukken per week, X, in een grote stad is Poisson verdeeld met parameter λ. De kans dat een ongeluk een dodelijke afloop heeft is p. Het aantal ongelukken per week met dodelijke afloop geven we aan met Y.

   a. Bepaal de momentgenererende functie van X met behulp van de definitie.

   b. Geef de voorwaardelijke verdeling van Y gegeven $X = x$ voor $x = 0, 1, \ldots$.

   c. Bepaal $E(Y)$.

   d. Bereken de covariantie van X en Y.

3. De stochastische variabelen X en Y hebben een simultane kansdichtheid

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1-y}, & \text{als } x > 0,\ y > 0 \text{ en } x + y < 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

   a. Laat zien dat f inderdaad een kansdichtheid is.

   b. Bepaal de marginale kansdichtheden van X en Y.

   c. Bepaal $f_{X|Y}(x|y)$, de voorwaardelijke kansdichtheid van X, gegeven $Y = y$, voor $0 < y < 1$.

   d. Bereken $P(X < Y)$.

   e. Zijn X en Y onderling onafhankelijk?

Z.O.Z.

4. In een doos zitten vier lampjes, twee van type 1 en twee van type 2. Met neemt willekeurig twee lampjes uit de doos en verbindt deze in serie. De lampjes in de schakeling gaan onafhankelijk van elkaar kapot, en de levensduur van de hele schakeling is voorbij zodra 1 van de lampjes kapot gaat. De levensduren van de lampjes zijn exponentieel verdeeld met parameter λ_i voor een lampje van type i, $i = 1, 2$. Zij R het aantal lampjes van type 1 in de schakeling en T de levensduur van de schakeling.

   a. Bepaal de kansfunctie van R.

   b. Laat zien dat g_1, de voorwaardelijke kansdichtheid van T, gegeven $R = 1$, wordt gegeven door

   $$g_1(t) = (\lambda_1 + \lambda_2)\, e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}, \quad t \geq 0.$$

   c. Geef $E(T \mid R = 1,\ T > 1)$.

   d. Bepaal de kansdichtheid van T.

Normering:

1		2				3					4			
a	b	a	b	c	d	a	b	c	d	e	a	b	c	d
3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2

Cijfer: $\dfrac{\text{Totaal}}{30} \times 9 + 1$

NB Cijfer van deze tweede deeltoets telt voor 70% mee voor eindcijfer van kansrekening (eerste deeltoets telt voor 30% mee).

Wij	Zij
0	200
200	200
400	200
425	275
425	475
725	475
840	560
895	705
895	705