

Tentamen Wiskundige Statistiek (vakcode 201400218)

23 oktober 2015, 13:45 – 16:45.

Docent: A.V. den Boer. Modulecoördinator: P. Mandal.

Boeken, rekenmachines, laptops, telefoons e.d. zijn niet toegestaan.

Vraag 1. Zij $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, en zij X_1, \dots, X_n onderling onafhankelijk en uniform $[0, \theta]$ verdeeld, voor een onbekende $\theta \in \mathbb{R}$ met $\theta > 0$.

a. (2 pt) Bepaal de maximum-likelihood schatter $\hat{\theta}$ van θ , en laat zien dat $\hat{\theta}$ voldoet aan

$$P(\hat{\theta} \leq t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0), \\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^n & (0 < t < \theta), \\ 1 & (\theta \leq t). \end{cases}$$

b. (4 pt) Laat zien dat $\hat{\theta}$ een consistente schatter is.

Vraag 2. Zij $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, en zij X_1, \dots, X_n onderling onafhankelijk en Poisson verdeeld, met onbekende parameter λ . Zij $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

a. (4 pt) Laat zien dat \bar{X} een efficiënte schatter is van λ .

Vraag 3. Zij $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, en zij X_1, \dots, X_n onderling onafhankelijk en normaal verdeeld, met onbekende verwachting μ en onbekende variantie σ^2 .

Zij verder $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, en zij Y_1, \dots, Y_m onderling onafhankelijk en Poisson verdeeld, met onbekende verwachting $\lambda > 0$.

Zij $\alpha \in (0,1)$.

a. (2 pt) Bepaal een (exact) $(1 - \alpha) \times 100\%$ betrouwbaarheidsinterval voor μ .

b. (3 pt) Bepaal een benaderend $(1 - \alpha) \times 100\%$ betrouwbaarheidsinterval voor $\mu - \lambda$.

c. (2 pt) Bepaal een (exacte) toets met significantieniveau α voor de nul- en alternatieve hypothese

$$H_0: \mu = 1, \quad H_1: \mu < 1.$$

b. (2 pt) Bepaal een (exacte) toets met significantieniveau α voor de nul- en alternatieve hypothese

$$H_0: \sigma^2 = 1, \quad H_1: \sigma^2 > 1.$$

Z.O.Z.

Vraag 4. Zij $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, en zij X_1, \dots, X_n onderling onafhankelijk en normaal verdeeld, met onbekende verwachting μ en variantie 1. Zij $\alpha \in (0,1)$.

a. (4 pt) Construeer een uniform meest krachtige toets van grootte α ("uniform most powerful test of size α ") voor de nul- en alternatieve hypothese:

$$H_0: \mu = 1,$$

$$H_1: \mu > 1.$$

Vraag 5. Zij $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, en zij X_1, \dots, X_n onderling onafhankelijk en identiek verdeeld, met onbekende mediaan $\mu \in \mathbb{R}$. Zij $\alpha \in (0,1)$.

a. (2 pt) Construeer een (benaderende) toets met significantieniveau α voor de nul- en alternatieve hypothese:

$$H_0: \mu = 1,$$

$$H_1: \mu > 1.$$