Reparatietoets: Analyse II

Statistiek en Analyse (201400218), 2014-2015

6-november-2014, 8:45 – 11:45 Totaal # Punten : 32

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
Antwoorden mogen zowel in het Engels als in het Nederlands gegeven worden.
Succes!

1. (a.) Toon aan dat de reeks $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2k+3}{(k+1)(k+2)}$ convergeert. [2]

   [Hint: het splitsen van de breuk kan nuttig zijn.]

   (b.) Bepaal ook de som. [1]

   (c.) Is de reeks absoluut convergent? Leg het uit. [1]

2. Bewijs de volgende stelling: [3]

   Zij $a_k \in \mathbb{R}$ met $a_k \neq 0$ voor groten waarden van k. Veronderstel dat de limiet

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

   bestaat als een uitgebreid reëel getal.

   i. Indien $r < 1$, dan convergeert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absoluut.

   ii. Indien $r > 1$ dan divergeert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

3. Zij E een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$. Laat f en f_n, $n \in \mathbb{N}$ functies zijn van E naar $\mathbb{R}$. Veronderstel dat $f_n \to f$ uniform op E. Bewijs: indien iedere f_n continu is in het punt $x_0 \in E$, dan is f continu in $x_0 \in E$. [3]

4. (a.) Definieer de convergentiestraal van een machtreeks. [1]

   (b.) Beschouw de functie $f(x) = \dfrac{x^4}{(1+2x)^2}$.

   (i.) Laat zien dat $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,(k+1)\,2^k\,x^{k+4}$ de Maclaurinreeks van $f(x)$ is. [3]

   (ii.) Bepaal de convergentiestraal en het convergentiegebied van de Maclaurinreeks van $f(x)$. [2]

5. Zij X een metrische ruimte.

   (a.) Geef de definitie van een compacte verzameling (van X). Definieer alle begrippen die je gebruikt in de definitie. [Ga ervan uit dat de begrippen open/gesloten verzameling al bekend zijn.] [2]

   (b.) Zij $H \subseteq X$ compact en $f : H \to Y$ een continue functie op H. Bewijs dat $f(H)$ compact is in Y. [3]

6. Zij $a \in \mathbb{R}^n$, V een open set die a bevat, en $f : V \to \mathbb{R}^m$.

   (a.) Wanneer is de functie f differentieerbaar op het punt a? [2]

   (b.) Bewijs dat de functie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sin(\sqrt{x^2+y^2})} & 0 < \|(x, y)\| < \pi \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   (i.) continu is in het punt $(0\,,\,0)$ maar [1]

   (ii.) niet differentieerbaar is op $(0\,,\,0)$. [2]

7. (a.) Geef de inverse functiestelling. [2]

   (b.) Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \backslash (0\,,\,0) \to \mathbb{R}^2$, gegeven door $f(u\,,\,v) = (\ln(uv)\,,\,u - 4v^3 - 3/u)$.

   (i.) Toon aan dat er een inverse (f^{-1}) bestaat in een niet lege open verzameling die het punt $(a\,,\,b) = (0\,,\,0)$ bevat. Is f^{-1} differentieerbaar op het punt $(a\,,\,b)$? Zo ja, bereken $D(f^{-1})(a\,,\,b)$. [3]

   (ii.) Geef commentaar over de eenduidigheid van f^{-1}. [1]

Cijfer: $\dfrac{\text{behaalde punten}}{32} \times 9 + 1$ (afgerond tot twee decimalen)