Deeltoets 2: Analyse II
Statistiek en Analyse (201400218), 2015-2016

20-oktober-2015, 8:45 – 10:15 Totaal aantal punten : 25

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
Antwoorden mogen zowel in het Engels als in het Nederlands.
Succes!

1. (a.) Geef de definities van open bol, open verzameling en gesloten verzameling in een metrische ruimte. [3]

   (b.) Zij X een metrische ruimte en $E \subseteq X$. Veronderstel verder dat de limiet van iedere convergente rij $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ in E voldoet aan $\lim_{n\to\infty} x_n \in E$.

   Bewijs dat E gesloten is. [4]

   [Hint: Bewijs uit het ongerijmde.]

2. (a.) Geef de definitie van een compacte verzameling van een metrische ruimte. [2]

   (b.) Zij X en Y twee metrische ruimtes en $f : X \to Y$ een functie. Veronderstel verder dat $E \subseteq X$ een compacte deelverzameling is en f continu is op E.

   Bewijs dat f uniform continu is op E. [4]

3. Zij de functies $g : [x_0, x_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $h : [y_0, y_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu. Beschouw de functie $f : [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \to \mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x, y) = \left(\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds\right)\left(\int_{y_0}^{y} h(t)\, dt\right).$$

   Bewijs dat f differentieerbaar is op $(x_0, x_1) \times (y_0, y_1)$. [3]

4. (a.) Formuleer de inverse functiestelling. [3]

   (b.) Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeven door $f(x\,,\,y) = (x^2y\,,\,y^2x)$.

   (i.) Toon aan dat er een differentieerbare inverse (f^{-1}) bestaat in een omgeving van het punt $(a\,,\,b) = (27\,,\,27)$ (d.w.z. in een niet lege open verzameling die het punt bevat). Bereken ook $D(f^{-1})(a\,,\,b)$. [3]

   (ii.) Bepaal de punten waar omheen geen enkele omgeving te vinden is waarin een inverse (f^{-1}) bestaat. Leg je antwoord uit. [3]

Cijfer:	$\dfrac{\text{behaalde punten}}{25} \times 9 + 1$ (afgerond tot twee decimalen)