Deeltoets 2: Analyse II

Statistiek en Analyse (201400218), 2016-2017

25-oktober-2016, 8:45 – 10:15 Totaal aantal punten : 23

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Antwoorden mogen zowel in het Engels als in het Nederlands.
Het gebruik van een rekenmachine of een boek is niet toegestaan.
Succes!

1. (a.) Geef de definities van een Cauchy rij in een metrische ruimte en een volledige metrische ruimte. [1+1]

   (b.) Bewijs de volgende stelling: [4]

   Zij X een volledige metrische ruimte en V een deelverzameling van X. Dan is V (als metrische deelruimte) volledig dan en slechts dan indien V (als deelverzameling) gesloten is in X.

2. Zij X een metrische ruimte en $E \subseteq X$ is een deelverzameling.

   (a.) Geef de definitie van de inwendige, E^0, van E. [1]

   (b.) Bewijs dat $x \notin E^0$ dan en slechts dan als $B_r(x) \cap E^c \neq \emptyset$ voor elke $r > 0$. [4]

3. (a.) Bewijs de middenwaardestelling voor reële functies op $\mathbb{R}^n$: [4]

   Zij V een open verzameling in $\mathbb{R}^n$ en veronderstel dat $f : V \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is op V. Neem verder aan dat $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ en $V \supseteq L(\mathbf{a}; \mathbf{b})$, het lijnsegment tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$. Dan bestaat er een $\mathbf{c} \in L(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ z.d.d.

   $$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

   [Je mag de middenwaardestelling voor reële functies op $\mathbb{R}$ wel gebruiken.]

   (b.) Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $E \subset \mathbb{R}^2$ is een convexe deelverzameling. Veronderstel dat de partiële afgeleiden f_x en f_y bestaan en gelijk aan nul in iedere punt $\mathbf{a} \in E$.
   Bewijs dat f is constant op E. [2]

4. Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeven door

   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq 0,\ y \in \mathbb{R} \\ 0 & x = 0,\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   (a.) Toon aan dat $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ bestaan op $\mathbb{R}^2$. [3]

   (b.) Toon aan dat de functie f niet differentieerbaar is in $(0,0)$. [3]

Cijfer:	$\dfrac{\text{behaalde punten}}{23} \times 9 + 1$ (afgerond tot twee decimalen)