3. Zij X een metrische ruimte.

   (a.) Geef de definitie van een compacte deelverzameling (van X). Definieer alle in de definitie gebruikte begrippen expliciet. [Ga ervan uit dat de begrippen open/gesloten verzameling al bekend zijn.] [2]

   (b.) Bewijs dat een compacte verzameling altijd gesloten is. [3]

4. Zij X een metrische ruimte en $E \subseteq X$ is een deelverzameling.

   (a.) Geef de definitie van de afsluiting, $\overline{E}$, van E. [1]

   (b.) Bewijs dat $x \in \overline{E}$ dan en slechts dan als $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$ vóór elke $r > 0$. [4]

   [Deze bewering is gebruikt in het bewijs van de stelling: $\partial E = \overline{E} \setminus E^0$. Deze stelling mag je dus in je bewijs niet gebruiken.]

5. Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2xy^2}{x^2 + 3y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a.) Bewijs dat f overal op $\mathbb{R}^2$ de eerste orde partiële afgeleides heeft. [2]

   (b.) Bewijs dat de functie f niet differentieerbaar is in $(0,0)$. [2]

6. (a.) Geef de impliciete functiestelling. [2]

   (b.) Beschouw de volgende relaties:

$$\begin{aligned} xu^3 - yv - 2w &= 0 \\ x^2 v^3 + yu - w^2 \ln(w) &= 0 \\ w^3 + y^4 - 2x^3 &= 0 \end{aligned}$$

   Geven de relaties voldoende grond om u, v en w te kunnen beschouwen als (zuivere) functies van x en y op een niet-leeg gebied rond het punt $(x,y) = (1,1)$, zodat (u,v,w) op deze punt de waarde $(1,-1,1)$ aanneemt? Als de functies bestaan, wat voor verdere eigenschappen (continuiteit, differentieerbaarheid, e.d.) hebben deze functies? [3]

Cijfer: $\dfrac{\text{behaalde punten}}{35} \times 9 + 1$ (afgerond tot een decimaal)