Dynamische Systemen – Toets 1

1 december 2014, 8.45-11.45

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is wel toegestaan.

Opgave 1. Bepaal de oplossing van de 1e orde DV

$$\frac{dx}{dt} = x(t)^2 \cos(t), \quad \text{met} \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Geef ook het domein waarop de oplossing bestaat.

Opgave 2. We bekijken het volgende stelsel

$$\begin{cases} x' = & x - y^2 - 2z, \\ y' = & x + y^3 - e^z - 1, \\ z' = & z + y^2 - x^2. \end{cases}$$

- Laat zien dat $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ een evenwicht is en dat de linearisatie gegeven wordt door $u' = Bu$ met

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Bepaal e^{Bt}. Hint: $\lambda = -1$ is een eigenwaarde.
- Is het evenwicht $(1, 1, 1)$ stabiel?

Opgave 3. We bekijken het volgende stelsel met parameter a

$$\begin{cases} x' = & -y + x(a - (1+a)\sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)), \\ y' = & x + y(a - (1+a)\sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)). \end{cases}$$

(a) Transformeer dit stelsel naar poolcoördinaten (r, θ).

(b) We definiëren $f(r) := \frac{dr}{dt}$, waarbij f volgt uit onderdeel (a), en we bekijken de differentiaalvergelijking $u' = f(u), u \in \mathbb{R}$. Geef alle a zodat $u' = f(u)$ twee evenwichten heeft.
Als u (a) niet heeft kunnen maken, neem dan $f(x) = x^3 - x + a$.

(c) Geef voor $u' = f(u)$ de faselijn voor $a = -1, \frac{1}{2}, 3$.

(d) Schets het faseplaatje in het xy-vlak voor $a = -1, \frac{1}{2}, 3$.

Opgave 4. We bekijken het volgende stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} & = & x + y - x(x^2 + 2y^2), \\ \dot{y} & = & y - x - y(3x^2 + y^2). \end{cases} \tag{1}$$

Bewijs dat (1) een periodieke baan heeft.

Z.O.Z.

OPGAVEN NUMERIEKE WISKUNDE

Opgave 5.

Gegeven is dat de functie f voldoende vaak differentieerbaar is. Met Taylorontwikkeling volgt voor de numerieke tweede afgeleide($h > 0$):

$$D_2(h) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} = f^{(2)}(x_0) + C\,h^2 + O(h^4).$$

(a) Bepaal de uitdrukking voor C.

(b) Wordt de fout in de tweede afgeleide gedomineerd door afbreekfouten of door afrondfouten? Onderscheid in uw antwoord situaties waarin $h \approx \epsilon_C$ en situaties waarin $h/\epsilon_C \gg 1$. Hier is ϵ_C de machineprecisie.

Opgave 6.

We proberen de limiet S

$$S = \lim_{x \to 0} G(x) \quad \text{met} \quad G(x) = \frac{\tan(\pi x + x^3/\pi)}{x}$$

numeriek te bepalen. Daartoe berekenen we $G(x)$ voor verschillende waarden van x. Dit levert de volgende tabel op:

x	numerieke waarde $G(x)$
0.1250000	3.3195370
0.0625000	3.1838906
0.0312500	3.1520388
0.0156250	3.1441963
0.0078125	3.1422431

(a) Bepaal uit de gegevens de orde van dit numerieke proces, m.a.w. bepaal de waarde van p in de relatie

$$G(x) = G + a_p x^p + O(x^{p+1}).$$

(b) Bepaal door éénmaal te extrapoleren een verbeterde benadering van S, inclusief foutschatting.

(c) Verklaar de waarde van p, gevonden in (a) door gebruikmaking van de stelling van Taylor voor de tangensfunctie: $\tan(x) = x + x^3/3 + \ldots$

Maximaal aantal punten per opgave (Max 36):

1	4pt	3	(2+2+3+2)pt	5	(2+1)pt
2	(2+7+1)pt	4	5pt	6	(2+2+1)pt

Cijfer=1+punten/4;