

Vak : Calculus voor TW en TN  
Vakcode : 201100103 & 201000175  
Datum : 2 November 2012  
Tijd : 8:45 - 11:45

**Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.**

**Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.**

**In totaal 6 opgaven, zie ook ommezijde.**

Het aantal punten behaald voor opgave 1, resp. opgave 2 (ieder maximaal 4) zal vervangen worden door het resultaat van toets 1, resp. toets 2, indien dat groter is.

1. (a) Onderzoek voor de getallenrij  $x_n = n \sin\left(\frac{2}{n}\right)$  of de limiet  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  bestaat, en zo ja bereken de limiet.
- (b) Beschouw de functie  $f(x) = xe^{-2x}$  voor  $x \in [0, \infty)$ . Onderzoek of de functie een maximale en minimale waarde aanneemt, en zo ja bepaal die waarde(n).

2. .

- (a) Onderzoek of de volgende limiet bestaat, en zo ja bepaal de limiet:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(y) + y^2}{x^2 + y^2}$$

- (b) Geef de 'epsilon-delta' definitie van continuïteit van een functie  $(x, y) \rightarrow f(x, y)$  in het punt  $(x, y) = (a, b)$ .

3. .

- (a) Bepaal de waarde van de volgende integraal

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

- (b) Bepaal alle verschillende oplossingen  $z \in \mathbb{C}$  van de vergelijking

$$z^4 = \sqrt{3} + i$$

4. Beschouw de functie  $f(x) = x\sqrt{2} \sin(x)$  voor  $x \in (0, \pi/2)$ .

- (a) Schets de grafiek van  $f$  en toon aan dat  $f$  monotoon stijgend is op het interval.
- (b) Laat  $g$  de inverse zijn van  $y = f(x)$ . Bepaal domein en bereik van de functie  $g$  en schets de grafiek van  $g$ .
- (c) Bereken de afgeleide van de functie  $g$  in het punt  $\pi/4$ , dus  $g'(\pi/4)$ .

5. .

- (a) Laat  $y = f(x)$  een functie zijn die willekeurig vaak differentieerbaar is in een omgeving van 'n punt  $x = a$ . Laat  $y = \ell(x)$  de raaklijn zijn aan de grafiek van de functie  $f$  in het punt  $(a, f(a))$ . Bepaal de volgende limiet

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \ell(x)}{(x - a)^2}.$$

(Controleer uw antwoord voor het speciale geval  $f(x) = x^2$  en  $a = 0$ .)

- (b) Interpreteer de volgende som als een Riemann som, en bereken de limiet

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^4} \sum_{k=1}^N k^3$$

- (c) Bereken de volgende integraal

$$\int_0^1 x \cosh(x) dx$$

6. Beschouw de functie op het platte vlak gegeven door  $f(x, y) = xy^2 + \cos(xy)$ .

- (a) Bepaal het raakvlak aan de grafiek van  $f$  in het punt  $(a, b) = (\pi/2, 1)$ .  
(b) Bepaal de richtingsafgeleide van  $f$  in het punt  $(a, b)$  in de richting  $(1, 1)/\sqrt{2}$ .

7. Beschouw voor vaste parameter  $\alpha$  de volgende differentiaalvergelijking voor de functie  $y(x)$

$$y'' - 2\alpha y' + y = 0$$

- (a) Bepaal de algemene oplossing (onderscheid zo nodig verschillende waarden van  $\alpha$ ).  
(b) Bepaal de waarde(n) van de parameter  $\alpha$  waarvoor alle oplossingen begrensd zijn voor  $x \in [0, \infty)$ .

-----  
**Puntenverdeling:**

1	a	2	3	a	3	4	a	2	5	a	3	6	a	3	7	a	3
	b	2		b	2		b	2		b	2		b	2		b	2
2	a	2					c	2		c	2						
	b	2															

**Totaal = 36+4=40 punten**